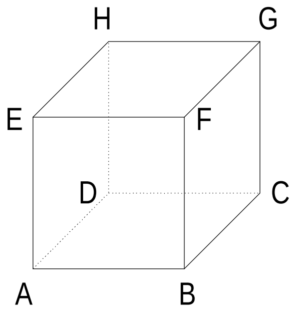
Promenade aléatoire sur un cube

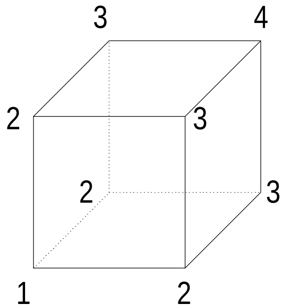
1. On part du point A et on se promène de façon aléatoire sur les arêtes du cube jusqu'à atteindre le point G.
Le but du problème est de calculer le nombre moyen d'étapes pour y parvenir. On appelle étape le parcours entre deux sommets consécutifs.



Une remarque et une question préalables : le nombre d'étapes peut être infini.
Va t-on atteindre le point G à coup sûr ?

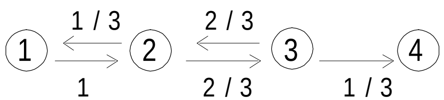
La position à un instant donné ne dépend que de la position précédente, la probabilité de passer d'un sommet à un sommet adjacent étant égale à $\frac{1}{3}$.

La position sur un sommet s'appelle un état ; l'état G est appelé état absorbant car le processus s'arrête lorsque qu'on atteint ce point. La liste des états successifs est encore appelée chaîne de Markov du nom du mathématicien russe (1856-1922) qui fut le premier a étudier ce genre de processus.



Grâce à la symétrie de la figure on peut limiter à 4 le nombre d'états de ce processus. L'état 1 correspondant au point de départ A, l'état 2 correspondant aux positions B, D, E, l'état 3 correspondant à C, F, H et l'état 4 correspondant à la position G. On peut schématiser les changements d'états par l'arbre ci-dessous :

Ainsi de l'état 1 on va obligatoirement vers l'état 2 (B, D ou E) ; de l'état 3 (par exemple de C) on va sur G avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur B ou D (état 2) avec la probabilité $\frac{2}{3}$.



On appelle p_n la probabilité de joindre G en n étapes.

n est au minimum égal à 3 et de façon évidente $p_3 = 1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ car le seul trajet possible est $1 \to 2 \to 3 \to 4$.

Si le trajet comporte 5 étapes alors il s'agit du trajet précédent de 3 étapes auquel s'ajoute un trajet de type $1 \leftrightarrow 2$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou un trajet de type $2 \leftrightarrow 3$ avec la probabilité $\frac{4}{9}$. Ainsi :

$$p_5 = \frac{1}{3}p_3 + \frac{4}{9}p_3 = \frac{7}{9}p_3.$$

On montre de la même façon que pour tout entier n supérieur à 1 :

$$p_{2n+3} = \frac{7}{9}p_{2n+1}.$$

(p_{2n+1}) est donc une suite géométrique de raison $\frac{7}{9}$ et par suite :

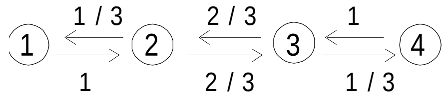
$$p_{2n+1} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}.$$

On vérifie aisément que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} p_{2n+1} = \frac{2}{9}\,\frac{1-\left(\frac{7}{9}\right)^{\mathrm{N}+1}}{1-\frac{7}{9}}$ et que la limite de cette somme est 1 lorsque N tend vers + ∞. Il s'agit ici d'une probabilité définie sur N ; cette limite égale à 1 prouve aussi que la promenade est nécessairement finie même si la durée d'une promenade n'est pas bornée.

Soit alors X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes nécessaires pour aller de A à G. L'espérance de X est la limite de la somme :
$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (2n+1)p_{2n+1}$ lorsque N tend vers + ∞. Or on démontre, par exemple par récurrence, que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (2n+1)p_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (2n+1)\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = 10 - 2(\mathrm{N}+5)\left(\frac{7}{9}\right)^{\mathrm{N}}$.

D'après le théorème des croissances comparées cette limite est 10 et c'est donc le nombre moyen de trajets attendus.

2. De la même manière on peut étudier le nombre de trajets avant le premier retour en A.



Si on appelle p_n la probabilité de retour en A en n étapes alors n est nécessairement pair et on a :

$p_2 = \frac{1}{3}$ (trajet $1 \leftrightarrow 2$)

$p_4 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ (trajet $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$)

$p_6 = \frac{1}{3} p_4 + \frac{4}{9} p_4 = \frac{7}{9} p_4$ car on ajoute au trajet précédent $3 \leftrightarrow 4$ ou $2 \leftrightarrow 3$.

De même pour tout n supérieur à 3 on a :

$p_{2n} = \frac{7}{9} p_{2n-2}$ et par suite $p_{2n} = \frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$.

On peut remarquer que comme précédemment :

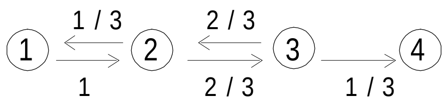
$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} p_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \frac{1-\left(\frac{7}{9}\right)^{\mathrm{N}-1}}{1-\frac{7}{9}}$ a pour limite 1 et donc qu'on est sûr de retourner un jour ou l'autre sur le point A.

Le nombre moyen de trajets est 8. C'est la limite de :

$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 2n\, p_{2n} = 8 - (2\mathrm{N}+9)\frac{6}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^{\mathrm{N}}$.

Cependant le calcul devient très difficile lorsque le point d'arrivée est B ou C aussi on lui préférera une approche plus globale.

3. On part de A et on arrive sur G.

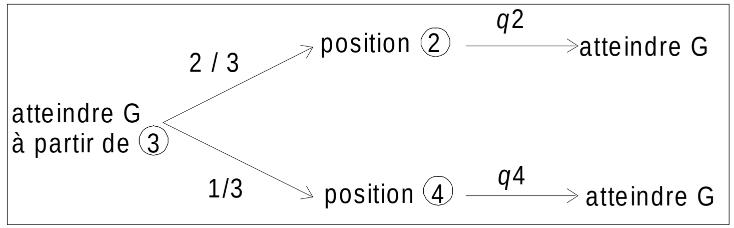


On appellera q_i la probabilité d'atteindre G lorsque l'on se trouve dans l'état i (i = 1, 2, 3 ou 4), ces états sont les mêmes bien sûr que dans le paragraphe **1.**

De façon évidente $q_4 = 1$ puisque l'état 4 correspond au point d'arrivée.

De plus la formule des probabilités totales nous donne :

$q_3 = \frac{2}{3} q_2 + \frac{1}{3} q_4$,



et de la même façon :

$q_2 = \frac{1}{3} q_1 + \frac{2}{3} q_3$

et $q_1 = q_2$.

Il est aisé alors de prouver que $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ et donc qu'on est certain d'atteindre le point G lorsqu'on part de A.

Si maintenant m_i désigne le nombre moyen d'étapes pour atteindre G à partir de l'état i alors les formules précédentes conduisent à :

$m_4 = 0$ évident car on se trouve déjà sur le point d'arrivée !

$m_3 = 1 + \frac{2}{3} m_2 + \frac{1}{3} m_4$. (1)

En effet soit X_i la variable aléatoire égale au nombre d'étapes pour atteindre G à partir de l'état i. On pose $p_{i,k} = \mathrm{P}(X_i = k)$. Dans ces conditions, l'espérance de X_i est sous réserve d'existence :

$m_i = \mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, p_{i,k}$.

Or d'après la formule des probabilités totales : $p_{3,k} = \frac{2}{3} p_{2,k-1} + \frac{1}{3} p_{4,k-1}$ dès que $k \geq 1$. Comme $p_{3,0} = 0$, alors il vient :

$m_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, p_{3,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3} p_{2,k-1} + \frac{1}{3} p_{4,k-1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\left(\frac{2}{3} p_{2,k} + \frac{1}{3} p_{4,k}\right)$ ce qui s'écrit encore :

$$m_3 = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p_{2,k} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p_{4,k} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} p_{2,k} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} p_{4,k}\ .$$

Or :

$\sum_{k=1}^{+\infty} p_{2,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{4,k} = 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p_{2,k} = m_2$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p_{4,k} = m_4$, d'où (1). Cette égalité facilement généralisable est appelée *seconde règle de la moyenne*.

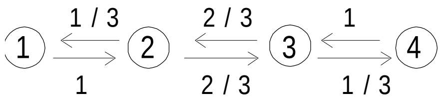
De la même manière on obtiendrait :

$m_2 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_3$ et $m_1 = 1 + m_2$.

On vérifie alors aisément que ce système a une solution unique :

$m_1 = 10$, $m_2 = 9$, $m_3 = 7$ et $m_4 = 0$. Le nombre moyen d'étapes pour atteindre G est donc 10.

Lorsque le point de départ et d'arrivée sont identiques alors comme :



$m_1 = 0$

$m_2 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_3$

$m_3 = 1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4$

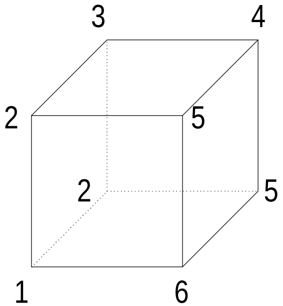
$m_4 = 1 + m_3$.

On vérifie alors aisément que $m_2 = 7$, $m_3 = 9$ et $m_4 = 10$.

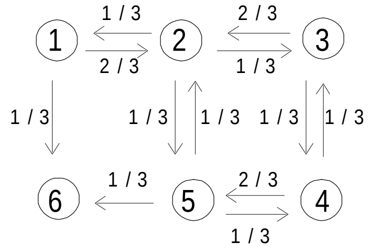
Or retourner au point de départ A veut dire qu'à l'étape précédente on se trouvait en 2 : le nombre moyen d'étapes pour retrouver le point de départ est donc $m_2 + 1 = 8$.

4. On part toujours de A mais on vise maintenant le point B. Le plan (ABH) est un plan de symétrie qui permet de réduire à 6 le nombre d'états à envisager.

Le diagramme qui suit résume la chaîne de Markov mais le nombre trop important de « circuits » possibles rend difficile la recherche du nombre moyen d'étapes pour atteindre B.



Par contre *la règle de la moyenne* s'applique ici sans trop de difficultés, on obtient à partir du diagramme ci-contre :



$m_1 = 1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_6$

$m_2 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_3 + \frac{1}{3}m_5$

$m_3 = 1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4$

$m_4 = 1 + \frac{1}{3}m_3 + \frac{2}{3}m_5$

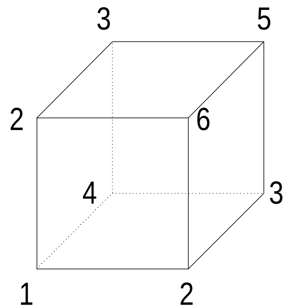
$m_5 = 1 + \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4 + \frac{1}{3}m_6$

$m_6 = 0$.

D'où la solution : $m_1 = 7$, $m_2 = 9$, $m_3 = 10$, $m_4 = 9$, $m_5 = 7$ et $m_6 = 0$.

Le nombre moyen d'étapes est donc 7.

De même on associe le parcours de A vers C aux deux schémas ci-dessous et au système :



$m_1 = 1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4$

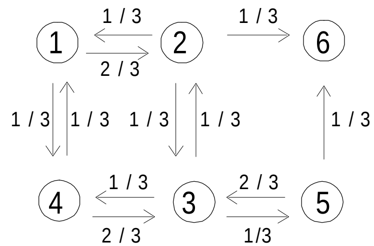
$m_2 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_3 + \frac{1}{3}m_6$

$m_3 = 1 + \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4 + \frac{1}{3}m_5$

$m_4 = 1 + \frac{1}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_3$

$m_5 = 1 + \frac{2}{3}m_3 + \frac{1}{3}m_6$

$m_6 = 0$.



D'où la solution : $m_1 = 9$, $m_2 = 7$, $m_3 = 9$, $m_4 = 10$, $m_5 = 7$ et $m_6 = 0$.

Le nombre moyen d'étapes est donc 9.