

Lancer de pièces : nombre maximum de résultats consécutifs identiques – jpq – 24/02/02

Le lancer d'une pièce de monnaie peut être assimilé à une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes sur $\{0, 1\}$ telle que $P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

Soit (Y_n) la suite définie par :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1 \\ Y_n &= N && \text{si } Y_{n-1} = N \\ &= Y_{n-1} + 1 && \text{si } Y_{n-1} \neq N \text{ et } X_n = X_{n-1} \\ &= 1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

Alors $P(Y_n = N)$ n'est autre que la probabilité pour que le nombre maximum de coups consécutifs égaux soit supérieur ou égal à N .

En outre (Y_n) est à valeurs dans $\{1, 2, \dots, N\}$ et Y_n ne dépend que de l'état antérieur Y_{n-1} puisque (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes ; une telle suite est encore appelée chaîne de Markov.

Posons par exemple $N = 6$ et $p_n = P(Y_n = 6)$.

Il est clair que l'on a : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$ et $p_6 = \frac{2}{2^6}$.

Si on lance n fois la pièce avec $n > 6$ alors $Y_n = 6$ se produit dans les cas suivants :

- lorsque $Y_{n-1} = 6$
- ou dans l'un des deux cas suivants :
 - on vient d'obtenir 6 fois 1 (événement A_n) et $X_{n-6} = 0$ et $Y_{n-6} < 6$
 - on vient d'obtenir 6 fois 0 (événement B_n) et $X_{n-6} = 1$ et $Y_{n-6} < 6$

D'après la formule des probabilités totales on a donc pour tout $n > 6$:

$$p_n = P(Y_{n-1} = 6) + P(A_n \text{ et } X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6) + P(B_n \text{ et } X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6),$$

D'où , comme A_n (resp. B_n) est indépendant de $(X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6)$ (resp. de $(X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6)$) :

$$p_n = p_{n-1} + 1 / 2^6 \times [P(X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6) + P(X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6)].$$

Or : $P(X_{n-6} = 0 \text{ et } Y_{n-6} < 6) + P(X_{n-6} = 1 \text{ et } Y_{n-6} < 6)] = P(Y_{n-6} < 6) = 1 - p_{n-6}$.

D'où pour tout $n > 6$:

$$p_n = p_{n-1} + \frac{1}{2^6}(1 - p_{n-6}).$$

On peut ainsi calculer de proche en proche p_n pour $n > 6$ sur tableur ou calculatrice. On trouve les valeurs suivantes :

n	10	20	50	150	200
p_n	0,094	0,237	0,544	0,918	0,965

Remarque : (p_n) est une suite croissante majorée par 1, elle converge donc vers une limite l qui vérifie $l = l + 1/2^6(1-l)$. Ce qui conduit à $l = 1$. En d'autres termes, la probabilité d'obtenir au moins six résultats consécutifs égaux tend en croissant vers 1 quand n tend vers ∞ . (cf pfmacth1.xls ou pfmacth1.zip)