On possède un jeu de 52 cartes contenant 4 rois.
Après avoir bien battu le jeu on tire des cartes, une après l'autre jusqu'à obtenir un roi. Combien faut-il tirer de cartes en moyenne ? En d'autres termes, quel est le rang moyen du premier roi tiré ?

Si on simule ou si on fait le calcul pour n cartes et k rois avec des petites valeurs de n et k, on s'aperçoit assez vite que cette moyenne est $m_{n,k} = \dfrac{n+1}{k+1}$ pour $k \leq n$. (1)

Ainsi dans le cas d'un jeu de 52 cartes classique la simulation doit donner un rang moyen voisin de 10,6.

Dans le cas général la formule (1) peut se démontrer par récurrence sur n.

Si n vaut 1, k vaut aussi 1 et il est clair que $m_{1,1} = 1 = \dfrac{n+1}{k+1}$.
Supposons maintenant que (1) soit vérifié au rang n pour toutes les valeurs de k. Alors $m_{n,k}$ peut s'écrire $m_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} r\, p_r$ où r est le rang du premier roi sorti et p_r la probabilité pour que cela se produise.

Si on ajoute une carte qui ne soit pas un roi alors :

- si cette carte est placée entre la position 1 et r, donc avec la probabilité $\dfrac{r}{n+1}$, le rang augmente d'une unité
- si cette carte est placée entre la position r + 1 et n + 1, donc avec la probabilité $\dfrac{n+1-r}{n+1}$ le rang ne change pas.

Ainsi pour tout $k \leq n$, $m_{n+1,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} (r+1)\, p_r \dfrac{r}{n+1} + \sum_{r=1}^{n-k+1} r\, p_r \dfrac{n+1-r}{n+1}$.
D'où : $m_{n+1,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} r\, p_r + \dfrac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n-k+1} r\, p_r = \dfrac{n+2}{n+1} m_{n,k}$. Et d'après l'hypothèse de récurrence :
$m_{n+1,k} = \dfrac{n+2}{k+1}$.
De plus si $k = n + 1$, il est clair que $m_{n+1,k} = 1$ car dans ce cas le jeu ne contient que des rois.

CQFD