I Suites géométriques, maths fi
$(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n)$

I Deux résultats fondamentaux

1) $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$

On **peut** connaître ce résultat par coeur. (D'ailleurs on **finit** par le connaître par coeur).

On **doit** savoir le retrouver **immédiatement** : on calcule

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + \ldots + & 2 & + & 1. \end{array}$$

Il y a n colonnes de somme (n + 1). Et l'on obtient deux fois la somme recherchée.

Exercice 1 :

1) Calculer $1 + 2 + \ldots + 1000$.

2) Calculer $100 + 101 + \ldots + 1000$:

a) En utilisant la question 1.

b) En utilisant le procédé de démonstration de la formule $1 + 2 + \ + n = \ldots$

3) Plus généralement, pour deux entiers n et m, $1 < n < m$, calculer de deux façons différentes :

$$n + (n+1) + \ldots + m.$$

2) Pour $\alpha \neq 1$:
$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n = (1 - \alpha^{n+1}) / (1 - \alpha) = (\alpha^{n+1} - 1) / (\alpha - 1)$

(Si $\alpha = 1$, la somme vaut évidemment $n + 1$. Dans les applications α est généralement positif et on écrit de préférence la somme

$(1 - \alpha^{n+1}) / (1 - \alpha)$ si $0 < \alpha < 1$ (et plus généralement si $-1 < \alpha < 1$)

$(\alpha^{n+1} - 1) / (\alpha - 1)$ si $\alpha > 1$

pour que le numérateur et le dénominateur soient tous les deux positifs).

Mêmes remarques que ci-dessus. On calcule

$(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n)(1 - \alpha)$. **Après simplification**, il reste : $1 - \alpha^{n+1}$.

Exercice 2 :

1) Calculer $1 + 2 + \ldots + 2^{10}$ et $1 + (1/2) + \ldots + (1/2)^{10}$

2) Calculer $1 + 10 + \ldots + 10^{10}$ et $1 + (1/10) + \ldots + (1/10)^{10}$

3) Vers quelles limites tendent $1 + (1/2) + \ldots + (1/2)^n$ et $1 + (1/10) + \ldots + (1/10)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3 :

1) Calculer de deux façons différentes $2^5 + 2^6 + \dots + 2^{10}$ et $10^5 + 10^6 + \dots + 10^{10}$.

2) Plus généralement, pour deux entiers n et m, $1 < n < m$, et un réel $\alpha \neq 1$, calculer de deux façons différentes : $\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^m$

II Suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite **arithmétique** de **premier terme a** et de **raison r** si :

$(u_0) = a$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + r$.

(on suppose $r \neq 0$, sinon (u_n) est constante)

On a donc : $(u_0 , u_1 , u_2 , \dots , u_n , \dots) = (a , a + r , a + 2r , \dots , a + nr , \dots)$

$\mathbf{u_n = a + nr}$ (par **récurrence**, si l'on y tient : par définition de la suite

(i) c'est vrai pour $n = 0$ (ii) si c'est vrai pour n alors c'est vrai pour n + 1)

$$\mathbf{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}$$
$$= a + (a + r) + (a + 2r) + (a + (n-1)r$$
$$= n.a + r (1 + 2 + \dots + (n-1)) = \mathbf{n.a + r.n (n-1) / 2}.$$

C'est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique . Formule qu'il ne faut surtout **pas** apprendre par coeur, mais qu'il faut savoir retrouver **vite** à partir de $1 + 2 + \dots + n = \dots$

D'autant que :

Vous risquez d'avoir besoin de $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) a + r.n (n+1) / 2$.

La suite (u_n) peut très bien commencer à $u_1 = a$ (vous retrouverez alors $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \dots$)

Exercice 4 :

1) On place au début de l'année 0, la somme S = 1000 Euros, à i = 10% annuels d'intérêts **simples** (chaque année iS s'ajoute à la somme possédée). On note S_n la somme possédée au début de l'année n. De quel type est la suite (S_n) ? Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle (au moins) doublée ? Même question si i = 3%. Et en général (i quelconque) ?

2) On place au début de **chaque** année, à partir de l'année 0, la somme S = 1000 Euros, sur un compte rémunéré à i = 10% annuels d'intérêts **simples**. Quelle somme figurera sur le compte au début de l'année 10 ? au début de l'année n ? Mêmes questions avec un intérêt i.

III Suites géométriques

La suite (u_n) est une suite **géométrique** de **premier terme a** et de **raison q** si :

$(u_0) = a$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = q\, u_n$

(on suppose $q \neq 1$, sinon (u_n) est constante)

On a donc : $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) = (a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots)$

$\mathbf{u_n = a\, q^n}$ (par **récurrence**, si l'on y tient)

$$\mathbf{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}$$
$$= a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$
$$= a\,(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$
$$\mathbf{= a\,(1 - q^n) / (1 - q) = a\,(q^n - 1) / (q - 1)}$$

Mêmes remarques que pour les suites arithmétiques : en mettant a en facteur, puis en multipliant par (1 - q)

1) retrouver **vite** la somme des n premiers termes, ainsi que :
2) $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
3) $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m$
4) $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ lorsque la suite commence à $u_1 = a$.

Exercice 5 :

1) On place au début de l'année 0, la somme S = 1000 Euros, à i = 10% annuels d'intérêts **composés** (en maths fi, si l'on ne précise pas "intérêt" veut toujours dire intérêt composé) :

Si S_n est la somme possédée au début de l'année n, la somme S_{n+1} possédée au début de l'année n+1 est $S_n + iS_n$.

De quel type est la suite (S_n) ? Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle (au moins) doublée ? Même question si i = 3%. Et en général (i quelconque) ?

2) On place au début de **chaque** année, à partir de l'année 0, la somme S = 1000 Euros, sur un compte rémunéré à i = 10% annuels. Quelle somme figurera sur le compte au début de l'année 10? au début de l'année n ? Mêmes questions avec un intérêt i.

IV Actualisation

On veut comparer des sommes versées ou perçues à des époques différentes : 1000 F de 1965 ne sont vraiment pas la même chose que 1000 F de 1995.

Il faut donc tenir compte d'un taux d'intérêt ou d'un taux d'inflation, ce que l'on nomme le **taux d'actualisation**.

S'il est de i, ce qui vaut C aujourd'hui vaudra $C(1 + i)^n$ dans n années. Réciproquement une somme de C au début de l'année n représente, au début de l'année 0, $C / (1 + i)^n$.

On actualise donc les différentes sommes, soit à l'année de départ, soit à l'année d'arrivée.

Exercice 6 : Si le taux d'actualisation est de 12 % vaut-il mieux payer 5 millions aujourd'hui ou 5 millions dans cinq ans et 5 millions dans dix ans ?

On compare : 5 et $5 / 1{,}12^5 + 5 / 1{,}12^{10}$ (actualisation à l'année de départ)

ou $5 \,.\, 1{,}12^{10}$ et $5 \,.\, 1.12^5 + 5$ (actualisation à l'année d'arrivée).

V Remboursements par annuités constantes

1) Le principe :

On emprunte au début de l'année 0 un capital C que l'on doit rembourser par des **annuités constantes** a, versées au début des années 1 à n. Le taux d'intérêt est de i. *(Dans la vie civile, on rembourse plutôt des mensualités : le principe est le même, les calculs sont plus longs.)*

C et n sont fixés (par vous et la banque), i est fixé (par la banque).

On veut tout d'abord calculer le **montant a de l'annuité**. (C'est la première chose qui vous intéresse).

Ensuite, pour chaque année k = 1, … , n, on décompose l'annuité en :

amortissement M_k : il sert à rembourser le capital emprunté (à amortir la dette)

montant I_k des intérêts pour l'année (k - 1) sur la somme D_{k-1} restant due à la fin de l'année k - 1.

Donc $I_k = D_{k-1}$ i et $a = I_k + M_k$ (Par exemple $D_0 = C$, $I_1 = C.i$ et donc $M_1 = a - C.i$).

On fabrique avec tout cela le **tableau d'amortissement**.

Naturellement au début les annuités servent surtout à payer les intérêts, et la part d'amortissement croît au fil des années, tandis que la dette décroît.

2) Calcul de l'annuité :

On écrit, sans se perdre dans les détails d'amortissement et d'intérêts que **la somme des annuités actualisées à l'année de départ est égale au capital emprunté**.

$C = a\left(1 / (1+i) + 1 / (1+i)^2 + \dots + 1 / (1+i)^n \right) = (a / i)\left(1 - 1 / (1+i)^n \right)$

D'où : $\mathbf{a = C\,i \;/\; \left(1 - 1 / (1+i)^n \right)}$

3) Les amortissements sont en progression géométrique :

Remarquant que la somme D_k restant due à la fin de l'année k est égale à la somme D_{k-1} restant due à la fin de l'année k - 1 moins le montant M_k de l' amortissement payé au début de l'année k, on écrit :

$a = I_k + M_k = D_{k-1}\, i + M_k$ (annuité de l'année k)

$a = I_{k+1} + M_{k+1} = D_k\, i + M_{k+1} = (D_{k-1} - M_k)\, i + M_{k+1}$ (annuité de l'année k + 1).

D'où après simplification : $\mathbf{M_{k+1} = M_k\,(1 + i)}$.

Partant de $M_1 = a - C.i$, les amortissements (et donc les intérêts) se calculent sans problème.

4) Question piège :

Quel est le montant total des intérêts versés ? **na - C**, bien sûr!

Exercice 7 : Un emprunt est amortissable en 10 ans, par annuités constantes. Sachant que le troisième amortissement est de 2.103,70 F et le sixième de 2.453,30 F, calculer :

1) Le taux de l'emprunt. **2)** Le capital emprunté

3) L’annuité constante. **4)** Le capital restant dû à la fin de la huitième année.

Exercice 8 : Une société a emprunté le 1er Juin 1992 une somme de 100.000 F qu'elle doit rembourser au moyen de versements annuels constants et à dates fixes, la première échéance étant le 1er Juin 1993 et la dernière le 1er Juin 1996.

Le taux d'intérêt annuel est de 14 %.

1) Calculer le montant a de l'annuité. (Si vous utilisez une formule, justifiez la rigoureusement.)

2) Avec l'accord du créancier, la société décide immédiatement après l'échéance du 1er Juin 1994, de régler la somme restant due à l'aide de mensualités constante versées à partir du 1er Juillet 1994. Le taux d'intérêt mensuel est de 1,1 %. Les mensualités s'élèvent à 5053 F.

A quelle date la dette sera-t-elle entièrement amortie ?