Satisfaction de contraintes

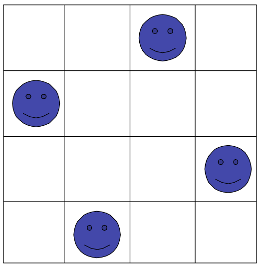
Joël Quinqueton,
jq@lirmm.fr
Deug MASS, 4e semestre

Représentation par contraintes

- Test de QI (Evans 1963)
- **Problèmes de Satisfaction de Contraintes**
- Problème P=(X, D, R)
  - X ensemble de variables $\{X_1,..., X_n\}$
  - D domaines des variables $\{D_1,...,D_n\}$
  - R contraintes (couples de valeurs autorisés), $R=\{R_{ij}, R_{kl},...\}$, avec $R_{ij} \subset D_i x D_j$
- Solution
  - Affectation d'une valeur à chaque variable satisfaisant toutes les contraintes

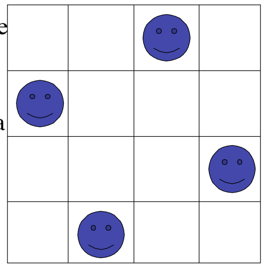
Problème des « n reines »

- Soit un échiquier n x n
- Positionner n reines de façon à ce qu'aucune ne soit menacée



Décrire le problème

- Une variable par ligne (ou colonne)
- Contient la valeur de la case où se trouve la reine
- Exemple: $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=2$



Les variables et les domaines

- $D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = \{0, 1, 2, 3\}$
- Contraintes: exprimer les valeurs autorisées de chaque couple de variables

R_{01}	0	1	2	3
0			+	+
1				+
2	+			
3	+	+		

De même, on exprime R_{12}, et R_{23}

Les autres contraintes

- Entre des variables de colonnes non contigües: R_{02}, R_{13}, et R_{03}

R_{02}	0	1	2	3
0		+		+
1	+		+	
2		+		+
3	+		+	

R_{03}	0	1	2	3
0		+	+	
1	+		+	+
2	+	+		+
3		+	+	

Recherche des solutions

- Espace de recherche:
  - Produit cartésien des domaines
  - Ici $4^4 = 256$ possibilités
- Espace des solutions
  - Instanciations respectant toutes les contraintes
  - Sous ensemble de l'espace de recherche
  - Ici combien de solutions?

Résolution

- Recherche descendante et retour arrière
  - Affecter les variables une par une
  - S'arrêter dès qu'il y a une impossibilité
- Heuristiques
  - S'apercevoir plus tôt des impossibilités
- Buts
  - Trouver une solution
  - Trouver toutes les solutions

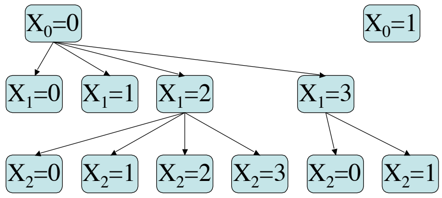
Méthode de résolution

- Notion de support
  - $v_j \in D_j$ est support de $v_i \in D_i$ ssi $(v_i, v_j) \in R_{ij}$
  - Exemple: 3 en colonne 2 est support de 0 en colonne 1
- Une valeur $v \in D_i$ est viable ssi elle a un support dans tous les autres D_j ($j \neq i$).
- Si toutes les valeurs sont viables, le problème est arc-consistant

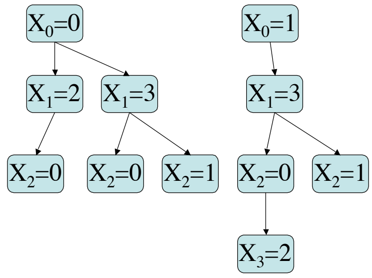
Complexité

- Vérification de l'arc-consistance:
  - plusieurs algorithmes proposés
  - Problème dit « polynomial »
  - Meilleur algorithme connu:
    - n variables, e contraintes,
    - domaines de taille $\leq$ d
    - Mémoire en e•d
    - Temps en e•d^2
- Recherche de solution: NP complet

Mise en oeuvre



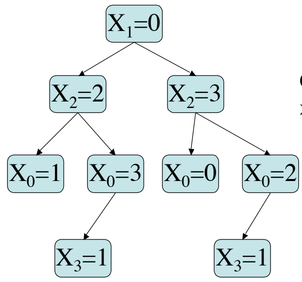
Parcourir uniquement les supports



Heuristiques

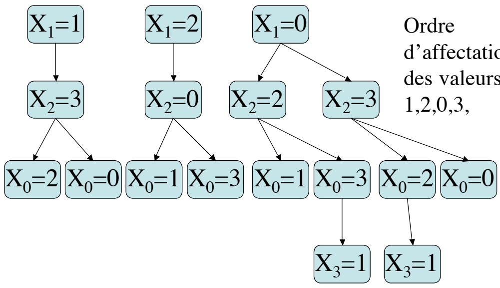
- Vérifier en permanence l'arc-consistance (après chaque affectation)
- Commencer par les variables les plus contraintes
- Commencer par les valeurs de support minimum
- …

Variables les plus contraintes



Ordre d'affectation:
x_1, x_2, x_0, x_3

Supports minimaux



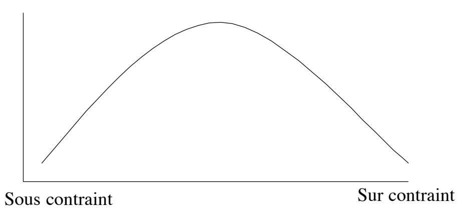
Ordre d'affectation des valeurs: 1,2,0,3,

Maintenir l'Arc consistance

- Après x_1=0:
  - D_0=D_2={2,3}, D_3={1,3}
  - Propager: D_2={2,3} =>D_3={0,1}∩{1,3},
  - Propager: D_3={1} =>D_2={3} =>D_0={2}
- Dans ce cas, une seule affectation reste possible, et c'est une solution

Les problèmes difficiles

- Quand le nombre de contraintes augmente:



Exemple de 3-sat

- Clauses ternaires de littéraux booléens
- Étant donnée une conjonction de ces clauses, est-elle satisfiable?
- Sur des clauses générées aléatoirement: on passe brutalement de P=1 à P=0 quand le quotient #clauses/#variables passe la valeur 4,3