

# Filtrage de systèmes dynamiques non linéaire à temps discret

*Groupe de travail*

*“Modèles Statistiques à Structure(s) Cachée(s)”*

Vivien Rossi

I3M

&

Jean-Pierre Vila

LASB

# Formalisation du problème

- Soit un système dynamique général

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \theta_x, u_t, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases} \quad (1)$$

- Description du système

- $x_t \in \mathbb{R}^d$ , variables d'état non observées
- $y_t \in \mathbb{R}^q$ , variables d'observation
- $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  bruits blancs de lois connues
- $f_t$  et  $h_t$ , bornées, connues
- $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ , paramètres inconnus
- $u_t \in \mathbb{R}^m$ , variables de commande
- $x_0 \sim \pi_0$ , connue

# Filtrage simple

- Soit un système dynamique

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad (2)$$

- Objectif : déterminer  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$ .

Notations :  $y_{1:t} = y_1, \dots, y_t$

$$p_t = p(x_t | y_1, \dots, y_t)$$

$$\pi_t = P(x_t \in dx | y_{1:t})$$

# Estimation Récursive de $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$

Deux étapes :

- Prédiction :  $p(x_t|Y_{t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|Y_{t-1})dx_{t-1}$

- Actualisation (Bayes) :

$$\begin{aligned} p(x_t|Y_t) &= p(x_t|y_t, Y_{t-1}) = \frac{p(x_t, y_t|Y_{t-1})}{p(y_t|Y_{t-1})} \\ &= \frac{p(y_t|x_t, Y_{t-1})p(x_t|Y_{t-1})}{\int p(y_t|x_t, Y_{t-1})p(x_t|Y_{t-1})dx_t} \\ &= \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|Y_{t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|Y_{t-1})dx_t} \end{aligned}$$

# Cas particulier : Système Linéaire

## Filtre de Kalman

Soit le système :

$$\begin{cases} x_t = F_{t-1}x_{t-1} + c_{t-1} + G_{t-1}\varepsilon_{t-1} \\ y_t = H_t x_t + d_t + S_t \eta_t \end{cases}$$

Hypothèse :  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ ,  $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$ ,  $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, Q_0)$ .  
 $\implies \mathcal{L}(x_t|Y_t)$  est gaussienne.

Soit  $\hat{x}_t \doteq \mathbf{E}[x_t|Y_t]$   
 $P_t \doteq \mathbf{E}[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T | Y_t] = \mathbf{E}[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T]$   
(déterministe)

et  $\hat{x}_t^- \doteq \mathbf{E}[x_t|Y_{t-1}]$   
 $P_t^- \doteq \mathbf{E}[(x_t - \hat{x}_t^-)(x_t - \hat{x}_t^-)^T | Y_{t-1}] = \mathbf{E}[(x_t - \hat{x}_t^-)(x_t - \hat{x}_t^-)^T]$   
(déterministe)

# Processus Gaussiens : Rappel Fondamental

*Propriété* : Soit  $Z = (X, Y)$  un vecteur aléatoire gaussien de dimension  $m + d$ , d'espérance et de matrice de covariance

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \quad Q_Z = \begin{pmatrix} Q_X & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_Y \end{pmatrix}$$

*Si la matrice  $Q_Y$  est inversible, la densité conditionnelle  $p_{X|Y=y}$  est une densité gaussienne, d'espérance*

$$\hat{X}(y) = \bar{X} + Q_{XY}Q_Y^{-1}(y - \bar{Y}),$$

*et de matrice de covariance*

$$R = Q_X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Q_{YX}.$$

# Calcul de $\hat{x}_t = \mathbf{E}[x_t|Y_t]$ et $P_t = \mathbf{Var}[x_t|Y_t]$

## Filtre de Kalman-Bucy

$$\begin{cases} x_t = F_{t-1}x_{t-1} + c_{t-1} + G_{t-1}\varepsilon_{t-1} \\ y_t = H_t x_t + d_t + S_t \eta_t \end{cases} \quad (3)$$

●  $t = 0$  :

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 + Q_0 H_0^T [H_0 Q_0 H_0^T + S_0 R_0 S_0^T]^{-1} [y_0 - (H_0 \bar{x}_0 + d_0)]$$

$$P_0 = Q_0 - Q_0 H_0^T [H_0 Q_0 H_0^T + S_0 R_0 S_0^T]^{-1} H_0 Q_0$$

# Calcul de $\hat{x}_t = \mathbf{E}[x_t|Y_t]$ et $P_t = \mathbf{Var}[x_t|Y_t]$

## Filtre de Kalman-Bucy

A chaque instant  $t$  supposons connue la loi conditionnelle de  $x_{t-1}$  sachant  $Y_{t-1}$  :

- *Prédiction :*

$$\hat{x}_t^- = \mathbf{E}[x_t|Y_{t-1}] = F_{t-1}\hat{x}_{t-1} + c_{t-1}$$

$$P_t^- = \mathbf{Cov}[x_t|Y_{t-1}] = F_{t-1}P_{t-1}F_{t-1}^T + G_{t-1}Q_{t-1}G_{t-1}^T$$

- *Actualisation :*

$$\hat{x}_t = \mathbf{E}[x_t|Y_t] = \hat{x}_t^- + K_t[y_t - (H_t\hat{x}_t^- + d_t)]$$

$$P_t = \mathbf{Cov}[x_t|Y_t] = [I - K_tH_t]P_t^-$$

$$K_t = P_t^- H_t^T [H_t P_t^- H_t^T + S_t R_t S_t^T]^{-1}$$



# Question d'intérêt : Stabilité du Filtre

$$\begin{cases} x_t = Fx_{t-1} + c + G\varepsilon_{t-1} \\ y_t = Hx_t + d + S\eta_t \end{cases}$$

Le filtre est dit **stable** si  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = P < \infty$ .

$P$  : solution d'une équation de Riccati.

*Condition suffisante* : Soit  $D$  tel que :  $Q = DD^T$ . Si

- $(F, GD)$  est stabilisable  
( $\exists L$  : V.P. de  $F + GDL$  de modules inférieurs à 1)
- $(H, F)$  est détectable  
( $\exists M$  : V.P. de  $F + MH$  de modules inférieurs à 1)
- $P_0 \geq 0$

Alors  $|P_t - P| = O(e^{-\lambda t})$

# Extension au cas non linéaire

## Filtre de Kalman Etendu

$$\begin{cases} x_{t+1} = f_t(x_t) + g_t(x_t)\varepsilon_t \\ y_t = h_t(x_t) + \eta_t \end{cases} \quad (4)$$

### ● Hypothèses :

- $f_t$  et  $h_t$  dérivables
- $\{\tilde{x}_t\}$  : trajectoire nominale donnée

### ● Linéarisation :

- $f_t(x) \simeq f_t(\tilde{x}_t) + \nabla f_t(\tilde{x}_t)(x - \tilde{x}_t)$
- $g_t(x) \simeq g_t(\tilde{x}_t)$
- $h_t(x) \simeq h_t(\tilde{x}_t) + \nabla h_t(\tilde{x}_t)(x - \tilde{x}_t)$

# Extension au cas non linéaire

## Filtre de Kalman Etendu

- Notations :

$$F_t = \nabla f_t(\tilde{x}_t)$$

$$c_t = f_t(\tilde{x}_t) - F_t \tilde{x}_t$$

$$G_t = g_t(\tilde{x}_t)$$

$$H_t = \nabla h_t(\tilde{x}_t)$$

$$d_t = h_t(\tilde{x}_t) - H_t \tilde{x}_t$$

- Systeme linéarisé :

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t x_t + c_t + G_t \varepsilon_t \\ y_t = H_t x_t + d_t + \eta_t \end{cases} \quad (5)$$

⇒ application de l'algorithme standard de Kalman.

Remarque : le plus souvent  $\{\tilde{x}_t\} \doteq \{\hat{x}_t\}$ .

# Extension au cas non linéaire - suite

## Autres approximations

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad (6)$$

- *Approximation des modèles  $f_t$  et  $h_t$  généralisation du FKE (Wishner et al.)*
  - approximations d'ordre  $> 1$ .
- *Approximations de  $E(x_t|Y_t)$  :*
  - par Réseaux de Neurones "Perceptrons" (Parisini&al.)
  - par Réseaux de Neurones Récurrents (Lo).
  - par Réseaux à Bases Radiales (Lee, Haykin).
  - par simulations de Monte-Carlo (Tanizaki et al.,....).

# Extension au cas non linéaire - suite

## Autres approximations

- *Approximation des densités conditionnelles*  $p(x_t|Y_{t-1})$  et  $p(x_t|Y_t)$  :

$$p(x_t|Y_{t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|Y_{t-1})dx_{t-1}$$

$$p(x_t|Y_t) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|Y_{t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|Y_{t-1})dx_t}$$

1. approximations par sommes de gaussiennes (Sorenson et al.) :  $\implies$  combinaison de FKE's.
2. approximations par fonctions splines et intégration numérique (Kitagawa).
3. approximations/estimations par simulation :  
Intégration par Monte-Carlo avec échantillonnage préférentiel, méthodes de rejet (Tanizaki,...)  
 $\longrightarrow$  *Méthodes particulières (...)*.

# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} x_{t+1} & \sim Q_t(x_t, \cdot) \\ y_t & = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} x_{t+1} & \sim Q_t(x_t, \cdot) \\ y_t & = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :

# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} x_{t+1} & \sim Q_t(x_t, \cdot) \\ y_t & = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :
  - Les transitions markoviennes  
 $Q_t(x, dy) = P(x_{t+1} \in dy | x_t = x)$
  - La vraisemblance  $\Psi_t(x) = P(y_t | x_t = x)$
  - La distribution initiale de  $x_0$  :  $x_0 \sim \pi_0$



# Filtres de Monte-Carlo

- Soit un système dynamique markovien

$$\begin{cases} x_{t+1} & \sim Q_t(x_t, \cdot) \\ y_t & = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Quantités supposées connues :

- Les transitions markoviennes

$$Q_t(x, dy) = P(x_{t+1} \in dy | x_t = x)$$

- La vraisemblance  $\Psi_t(x) = P(y_t | x_t = x)$

- La distribution initiale de  $x_0$  :  $x_0 \sim \pi_0$

- Principe fondamental : Estimer  $P(x_t \in dx | y_{1:t})$  à partir de simulations de particules  $\tilde{x}_t^i$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = 1$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = 1$
- Synthèse de l'algorithme :

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = 1$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i}$$

# Filtre de Monte Carlo Pondéré

- Initialisation :  $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$  et  $\omega_0^i = 1$
- Synthèse de l'algorithme :
  - Etape d'évolution

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i}$$

- Etape de correction

$$\pi_{t+1|t}^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^n = \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i}$$

# Filtre Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

# Filtre Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

# Filtre Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

- Etape de correction

$$\sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{pondération}} \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} = \pi_{t+1}^n$$



# Filtre Particulaire avec Interaction

- Etape d'échantillonnage

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^n]{\text{bootstrap}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

- Etape d'évolution :  $\sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i}$

- Etape de correction

$$\sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{pondération}} \sum_{i=1}^n \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} = \pi_{t+1}^n$$

- ▶ Premier résultat de convergence : Del Moral(1995).

# Filtre par noyau de convolution

$$\text{Soit } S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

# Filtre par noyau de convolution

$$\text{Soit } S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Pré-requis :  $\begin{cases} \text{Savoir générer } x_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } x_t \text{ sachant } x_{t-1}. \\ \text{Savoir générer } y_t \text{ sachant } x_t. \end{cases}$

# Filtre par noyau de convolution

$$\text{Soit } S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Pré-requis :  $\begin{cases} \text{Savoir générer } x_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } x_t \text{ sachant } x_{t-1}. \\ \text{Savoir générer } y_t \text{ sachant } x_t. \end{cases}$

- Par définition :  $p(x_t | y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}$ .

# Filtre par noyau de convolution

$$\text{Soit } S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

- Pré-requis :  $\begin{cases} \text{Savoir générer } x_0 \sim \pi_0. \\ \text{Savoir générer } x_t \text{ sachant } x_{t-1}. \\ \text{Savoir générer } y_t \text{ sachant } x_t. \end{cases}$

- Par définition : 
$$p(x_t | y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}.$$

- Principes fondamentaux :
  - Estimer  $p_{XY}$  et  $p_Y$  par la méthode des noyaux de convolution.
  - Utiliser des couples  $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$  générés à partir de  $S$  pour construire les estimateurs.

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .

- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.

- $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
→  $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :



# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .

- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.

- $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

- Estimation des densités :

- Mesures empiriques :

$$\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{z}_t^i} \text{ et } \nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$$

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .

- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.

- $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

- Estimation des densités :

- La densité conjointe  $p_{XY}$

$$p_{XY}^n(z_t) = K_h * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)$$

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :
  - $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .
  - Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.  
→  $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .
- Estimation des densités :
  - La densité marginale  $p_Y$

$$p_Y^n(y_{1:t}) = K_h * \nu_t^n(y_{1:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t}, \tilde{y}_{1:t}^i).$$

# Filtre à convolution simple

Soit  $z_t = (x_t, y_{1:t})$ , il existe des mesures  $\mu_t$  et  $\nu_t$  telles que :  $z_t \sim \mu_t$  et  $y_{1:t} \sim \nu_t$

- Génération des particules :

- $\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n \sim \pi_0$ .

- Evolution des  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$ ,  $t$  fois successivement.

- $\tilde{z}_t^1, \dots, \tilde{z}_t^n \sim \mu_t$  avec  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

- Estimation des densités :

- Le filtre optimal  $p(x_t|y_{1:t})$  :

$$p^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{p_{XY}^n(z_t)}{p_Y^n(y_{1:t})} = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_t, \tilde{z}_t^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t}, \tilde{y}_{1:t}^i)}$$

# Commentaires

- La vitesse asymptotique  $\sqrt{nh_n^{tq+d}}$  n'est pas satisfaisante
- Alternatives envisagées :
  - limiter la mémoire :  $\sqrt{nh_n^{Tq+d}}$
  - sélectionner les particules
  - ré-échantillonner

# Filtre avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

# Filtre avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- Etape 1 Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$

# Filtre avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- **Etape 1** Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$
- **Etape 2** Génération des  $n$  particules :  $\tilde{z}_{t+1}^i$   
on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  en appliquant le système  $S$  à  $\tilde{x}_t^i$ .



# Filtre avec ré-échantillonnage

Soient  $p_0^n = \pi_0$ ,  $t \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ :

- **Etape 1** Génération de  $n$  états :  $\tilde{x}_t^i \sim p_t^n$
- **Etape 2** Génération des  $n$  particules :  $\tilde{z}_{t+1}^i$   
on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  en appliquant le système  $S$  à  $\tilde{x}_t^i$ .
- **Etape 3** Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(z_{t+1}, \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

# Paramètres inconnus dans le système dynamique

Soit un système dynamique plus général :

$$\begin{cases} x_{t+1} & = & f_t(x_t, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t & = & h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases}$$

Objectif : estimer  $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ .

# Paramètres inconnus dans le système dynamique

Soit un système dynamique plus général :

$$\begin{cases} x_{t+1} & = f_t(x_t, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t & = h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases}$$

Objectif : estimer  $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ .

Approches envisagées :

- Estimateur des Moindres Carrés conditionnels
- Maximum de vraisemblance
- Approche de type Monte Carlo

# Estimation des paramètres par une approche de type Monte Carlo

- Le filtre optimal est défini par :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \int p(x_t, \theta|y_{1:t})d\theta$$

# Estimation des paramètres par une approche de type Monte Carlo

- Le filtre optimal est défini par :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \int p(x_t, \theta|y_{1:t})d\theta$$

- Principe de base : Traiter les paramètres comme les variables d'états
  - Loi a priori sur les paramètres  $p_0(\theta)$ .
  - Loi d'évolution des paramètres :  $\theta_{t+1} = \theta_t$ .

# Estimation des paramètres par une approche de type Monte Carlo

- Le filtre optimal est défini par :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \int p(x_t, \theta|y_{1:t})d\theta$$

- Principe de base : Traiter les paramètres comme les variables d'états
  - Loi a priori sur les paramètres  $p_0(\theta)$ .
  - Loi d'évolution des paramètres :  $\theta_{t+1} = \theta_t$ .
- Estimation de deux densités :
  - $p(x_t|y_{1:t})$
  - $p(\theta|y_{1:t})$

# Implémentation

**Etape 1**, pour  $t > 1$

- Génération des  $n$  trajectoires : pour  $i = 1, \dots, n$

$$(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i) \sim \hat{p}_{t-1}^n(x, \theta | y_{1:t-1})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{t-1}^i \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_{t-1}}$$

$$\tilde{\eta}_t^i \sim \mathcal{L}_{\eta_t}$$

$$\tilde{x}_t^i = f_t(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\varepsilon}_{t-1}^i)$$

$$\tilde{y}_t^i = h_t(\tilde{x}_t^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\eta}_t^i)$$

$$\tilde{\theta}_t^i = \bar{\theta}_{t-1}^i$$

# Implémentation

- Estimation des densités :

$$\widehat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\widehat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\widehat{p}_t^n(x | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$t = t + 1$

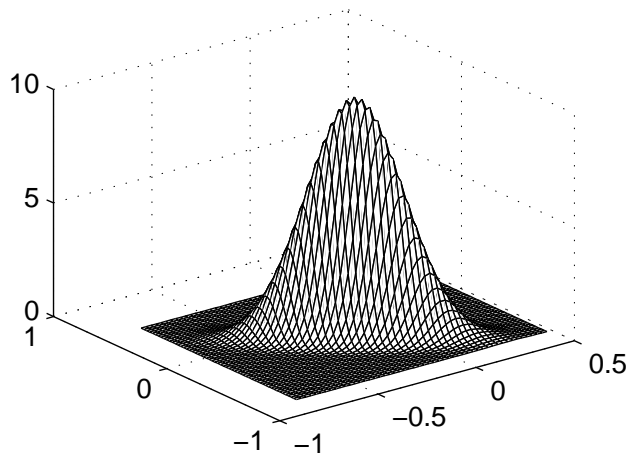
Retour à l'étape 1.



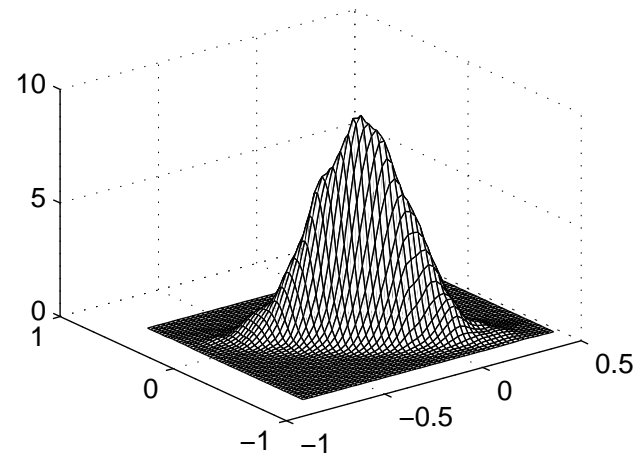
# Simulation d'un système linéaire

Soit le système 
$$\begin{cases} x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} x_t + 0.2\varepsilon_t \\ y_t = [1 \ 1]x_t + 0.1\eta_t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_t \sim \mathcal{N}_2(0, I) \\ \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ x_0 \sim \mathcal{N}_2(0, 0.1) \end{array}$$
 où

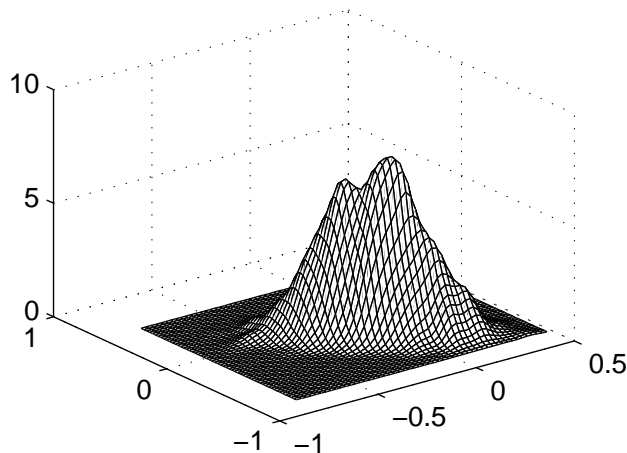
Vrai densite



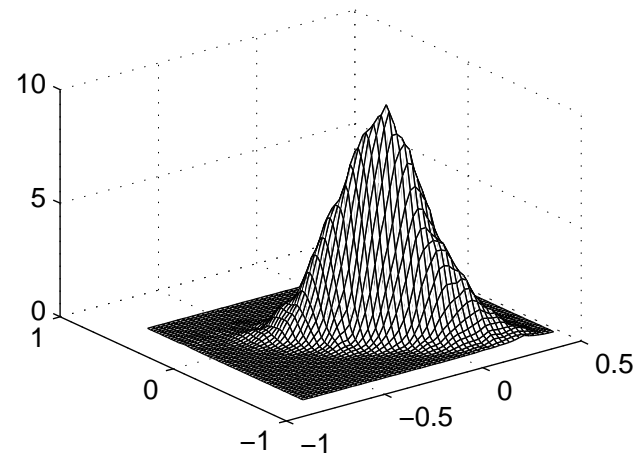
Estimation : n=1000000



Estimation : n=10000



Estimation : n=100000



# Comparaisons sur simulations

Soit le système non linéaire (Mendès & al., Kitagawa, Doucet, ...)

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim N(0, 5)$ .

- Estimateur de l'état :  $E[x_t | y_1, \dots, y_t]$
- Situations considérées :
  - Cas 1 :  $v_t \sim N(0, 1)$  et  $w_t \sim N(0, 0.1^2)$
  - Cas 2 :  $v_t \sim N(0, 1)$  et  $w_t \sim N(0, 1)$
  - Cas 3 :  $v_t \sim N(0, 10)$  et  $w_t \sim N(0, 1)$

# Comparaisons sur simulations

Soit le système non linéaire (Mendès & al., Kitagawa, Doucet, ...)

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim N(0, 5)$ .

## ● Filtres comparés

- MCP : Le filtre de Monte Carlo pondéré
- IPF : Filtre particulaire avec interaction
- Post-Reg : Filtre particulaire post régularisé
- CF : Filtre à convolution simple
- CFR : Filtre à convolution avec ré-échantillonnage

# Résultats des simulations

Moyennes des erreurs quadratiques sur 100 trajectoires de  $t = 120$  états.

Nb particules	MCP	IPF	Post-Reg	CF	CFR
25	div	div	div	div	23.62
50	div	div	div	div	14.81
100	div	div	div	14.15	10.30
500	div	div	div	11.69	8.08
1000	div	div	div	11.80	7.91
2500	div	div	div	10.75	7.59
5000	div	div	div	10.96	7.66

Cas 1 :  $v_t \sim N(0, 1)$  et  $w_t \sim N(0, 0.1^2)$

# Résultats de simulations (suite)

Moyennes des erreurs quadratiques sur 100 trajectoires de  $t = 120$  états.

Nb particules	MCP	IPF	Post-Reg	CF	CFR
25	22.60	23.93	19.37	<b>18.82</b>	18.92
50	19.04	16.62	<b>14.14</b>	16.78	15.02
100	16.09	13.23	<b>11.31</b>	14.77	12.59
500	12.93	<b>10.26</b>	10.36	13.45	10.49
1000	12.13	10.18	<b>10.15</b>	13.51	10.26
2500	11.24	10.14	<b>10.13</b>	13.25	10.15
5000	10.89	10.12	10.18	13.57	<b>10.10</b>

Cas 2 :  $v_t \sim N(0, 1)$  et  $w_t \sim N(0, 1)$

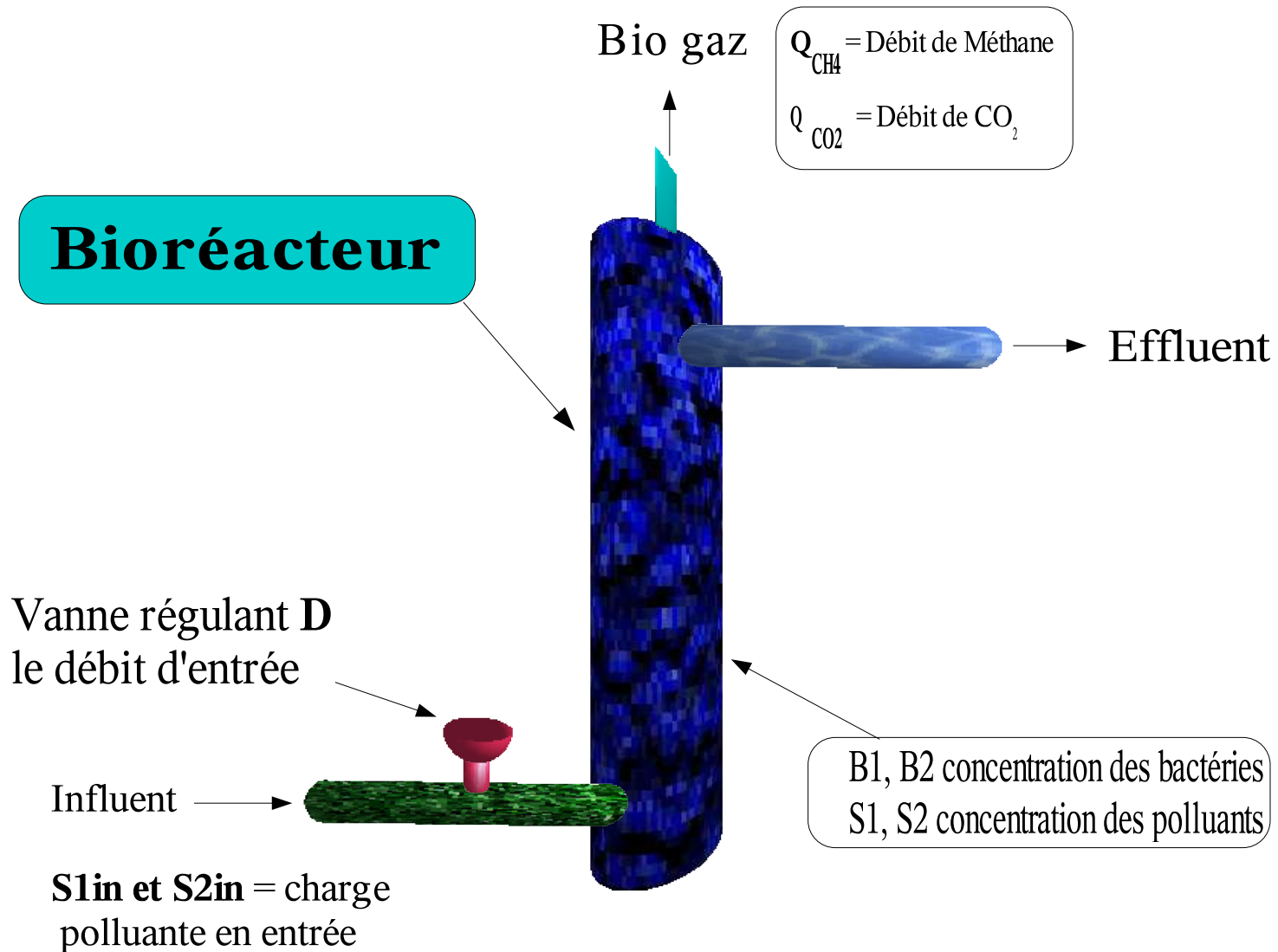
# Résultats de simulations (suite)

Moyennes des erreurs quadratiques sur 100 trajectoires de  $t = 120$  états.

Nb particules	MCP	IPF	Post-Reg	CF	CFR
25	53.06	44.84	46.36	41.99	<b>37.50</b>
50	48.18	33.62	32.97	36.52	<b>29.48</b>
100	44.99	27.91	27.62	33.77	<b>27.43</b>
500	39.11	23.80	<b>22.88</b>	31.51	23.38
1000	36.67	22.95	<b>22.31</b>	31.43	23.46
2500	32.86	<b>22.57</b>	22.66	33.23	22.70
5000	30.98	22.34	22.45	33.31	<b>22.33</b>

Cas 3 :  $v_t \sim N(0, 10)$  et  $w_t \sim N(0, 1)$

# Application bioprocédé



# Description du bioprocédé

$B_1$	Concentration en bactérie acidogène.
$B_2$	Concentration en bactérie méthanogène.
$Z$	Concentration dans le milieu en ions fort.
$S_1$	Concentration en demande chimique d'oxygène.
$S_2$	Concentration en acides gras volatils.
$C_{TI}$	Concentration totale de carbone inorganique.
$D$	Taux de dilution.
$Q_{CO_2}$	Débit de $CO_2$ .



# Bioprocédé de dépollution

- Modèle de référence

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{B}_1 = (\mu_1 - \alpha D)B_1 \\ \dot{B}_2 = (\mu_2 - \alpha D)B_2 \\ \dot{Z} = D(Z^{in} - Z) \\ \dot{S}_1 = D(S_1^{in} - S_1) - k_1\mu_1 B_1 \\ \dot{S}_2 = D(S_2^{in} - S_2) + k_2\mu_1 B_1 - k_3\mu_2 B_2 \\ \dot{C}_{TI} = D(C_{TI}^{in} - C_{TI}) + k_4\mu_1 B_1 + k_5\mu_2 B_2 - Q_{CO_2} \end{array} \right.$$

- Lois de croissance des bactéries

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2}$$

# Paramètres du modèle

Param.	Valeur	Param.	Valeur
$\mu_{max1}$	1.2	$k_1$	42.14
$\mu_{max2}$	0.74	$k_2$	116.5
$K_{S_1}$	7.1	$k_3$	268
$K_{S_2}$	9.28	$k_4$	50.6
$K_I^2$	256	$k_5$	343.6
$kla$	19.8	$k_6$	453
$\alpha$	0.5		

Valeurs des paramètres obtenus par, (Bernard & al. 2001)  
sous l'hypothèse de biomasses constantes

# Variables observées

- $Z$ ,
- $C_{TI}$ ,
- $pH$ , avec  $pH(t) = -\log \left( \frac{K_{co_2}(C_{TI}(t) - Z(t) + S_2(t))}{Z(t) - S_2(t)} \right) / \log 10$
- $Q_{gaz}$ , avec  $Q_{gaz}(t) = Q_{CO_2}(t) + Q_{CH_4}(t)$ 
  - $Q_{CO_2}(t) = k_{la}(C_{TI}(t) + S_2(t) - Z(t) - K_h P_c(t))$
  - $Q_{CH_4}(t) = k_6 \frac{RT}{P_t(t)} V \mu_2(t) B_2(t)$

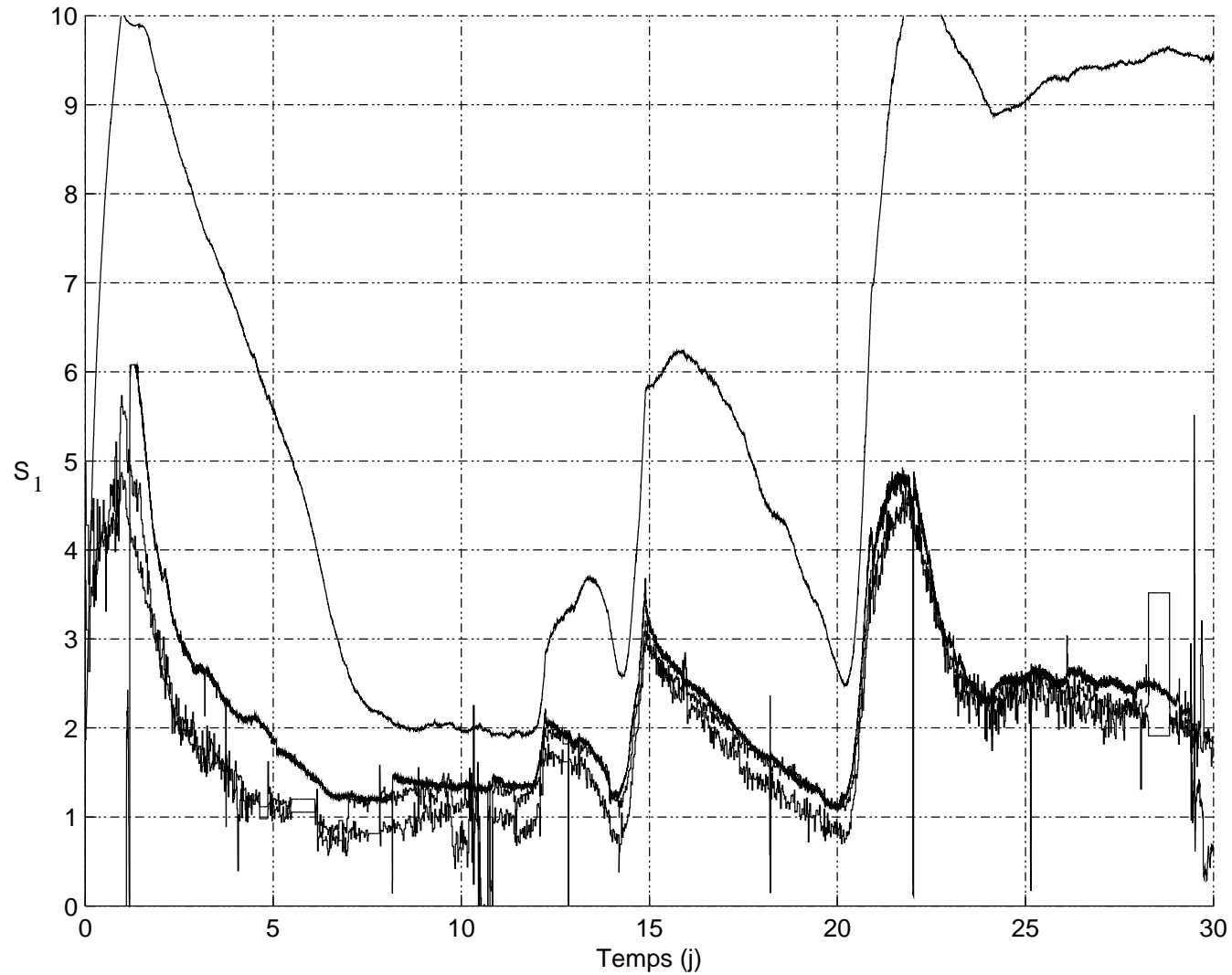
# Adaptation au contexte stochastique

- Discrétisation du système

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(t+1) = B_1(t) + T(\mu_1(t) - \alpha D(t))B_1(t) + \varepsilon_1 \\ B_2(t+1) = B_2(t) + T(\mu_2(t) - \alpha D(t))B_2(t) + \varepsilon_2 \\ Z(t+1) = Z(t) + T(D(t)(Z_{in} - Z(t))) + \varepsilon_3 \\ S_1(t+1) = S_1(t) + T(D(t)(S_{1in} - S_1(t)) - k_1\mu_1(t)B_1(t)) + \varepsilon_4 \\ S_2(t+1) = S_2(t) + T(D(t)(S_{2in} - S_2(t)) + k_2\mu_1(t)B_1(t) \\ \quad - k_3\mu_2(t)B_2(t)) + \varepsilon_5 \\ C_{TI}(t+1) = C_{TI}(t) + T(D(t)(C_{TIin} - C_{TI}(t)) - Q_{CO_2}(t) \\ \quad + k_4\mu_1(t)B_1(t) + k_5\mu_2(t) * B_2(t)) + \varepsilon_6 \end{array} \right.$$

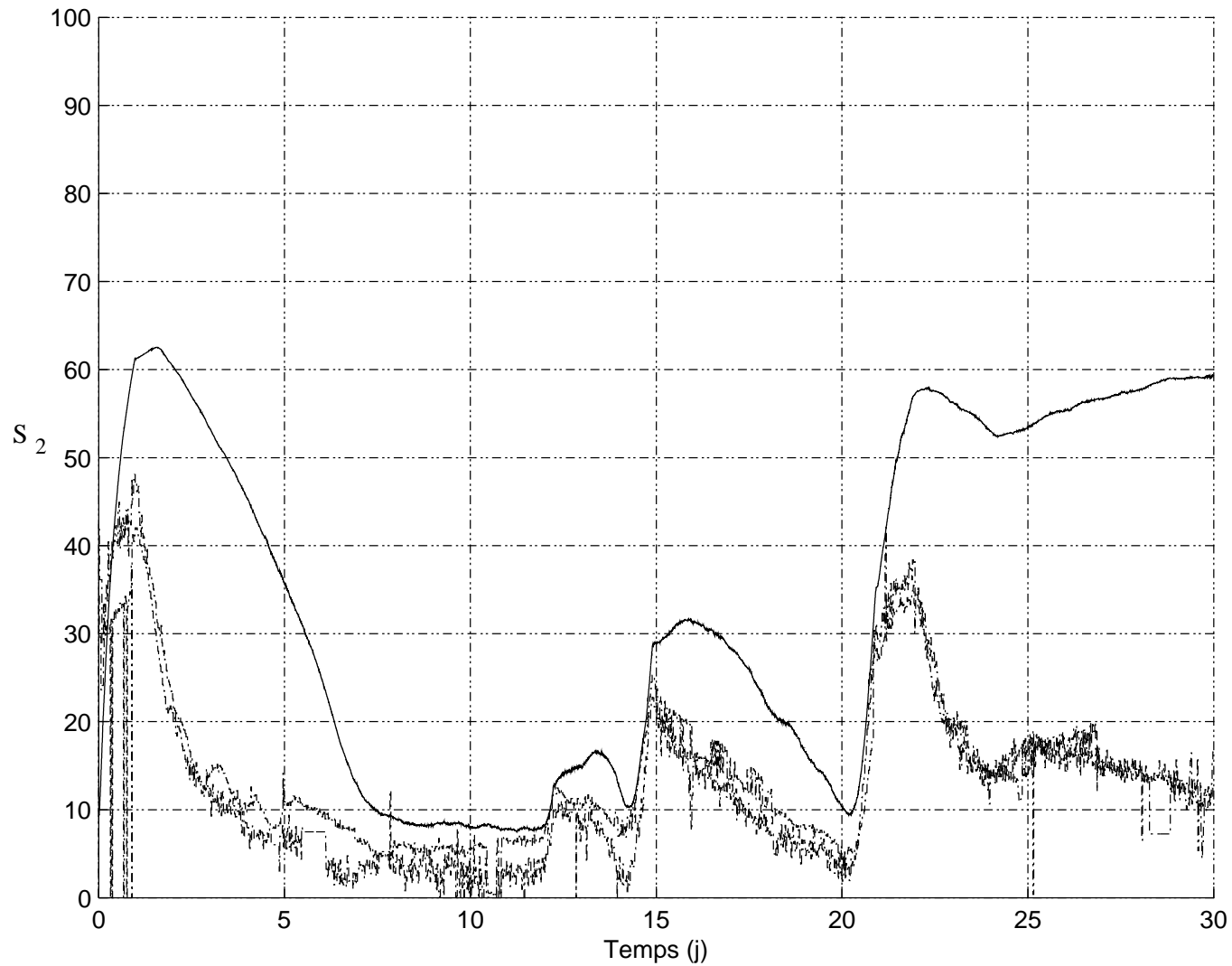
- Ajout de perturbations :  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ ,  
 $\varepsilon_3, \varepsilon_6 \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ ,  $\varepsilon_4 \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$  et  $\varepsilon_5 \sim \mathcal{N}(0, 0.3)$

# Application sur données réelles



Evolution de  $S_1$

# Application sur données réelles



Evolution de  $S_2$

# Filtrage des données réelles

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(t+1) = B_1(t) + T(\mu_1(t) - \alpha D(t))B_1(t) + a_1\varepsilon_1 \\ B_2(t+1) = B_2(t) + T(\mu_2(t) - \alpha D(t))B_2(t) + a_2\varepsilon_2 \\ Z(t+1) = Z(t) + T(D(t)(Z_{in} - Z(t))) + a_3\varepsilon_3 \\ S_1(t+1) = S_1(t) + T(D(t)(S_{1in} - S_1(t)) - k_1\mu_1(t)B_1(t)) \\ \quad + a_4\varepsilon_4 \\ S_2(t+1) = S_2(t) + T(D(t)(S_{2in} - S_2(t)) + k_2\mu_1(t)B_1(t) \\ \quad - k_3\mu_2(t)B_2(t)) + a_5\varepsilon_5 \\ C_{TI}(t+1) = C_{TI}(t) + T(D(t)(C_{TIin} - C_{TI}(t)) - Q_{CO_2}(t) \\ \quad + k_4\mu_1(t)B_1(t) + k_5\mu_2(t)B_2(t)) + a_6\varepsilon_6 \end{array} \right.$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

# Filtrage des données réelles

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} + a_7 * \varepsilon_7$$

$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_1 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2} + a_8 * \varepsilon_8$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$



# Filtrage des données réelles

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} + a_7 * \varepsilon_7$$

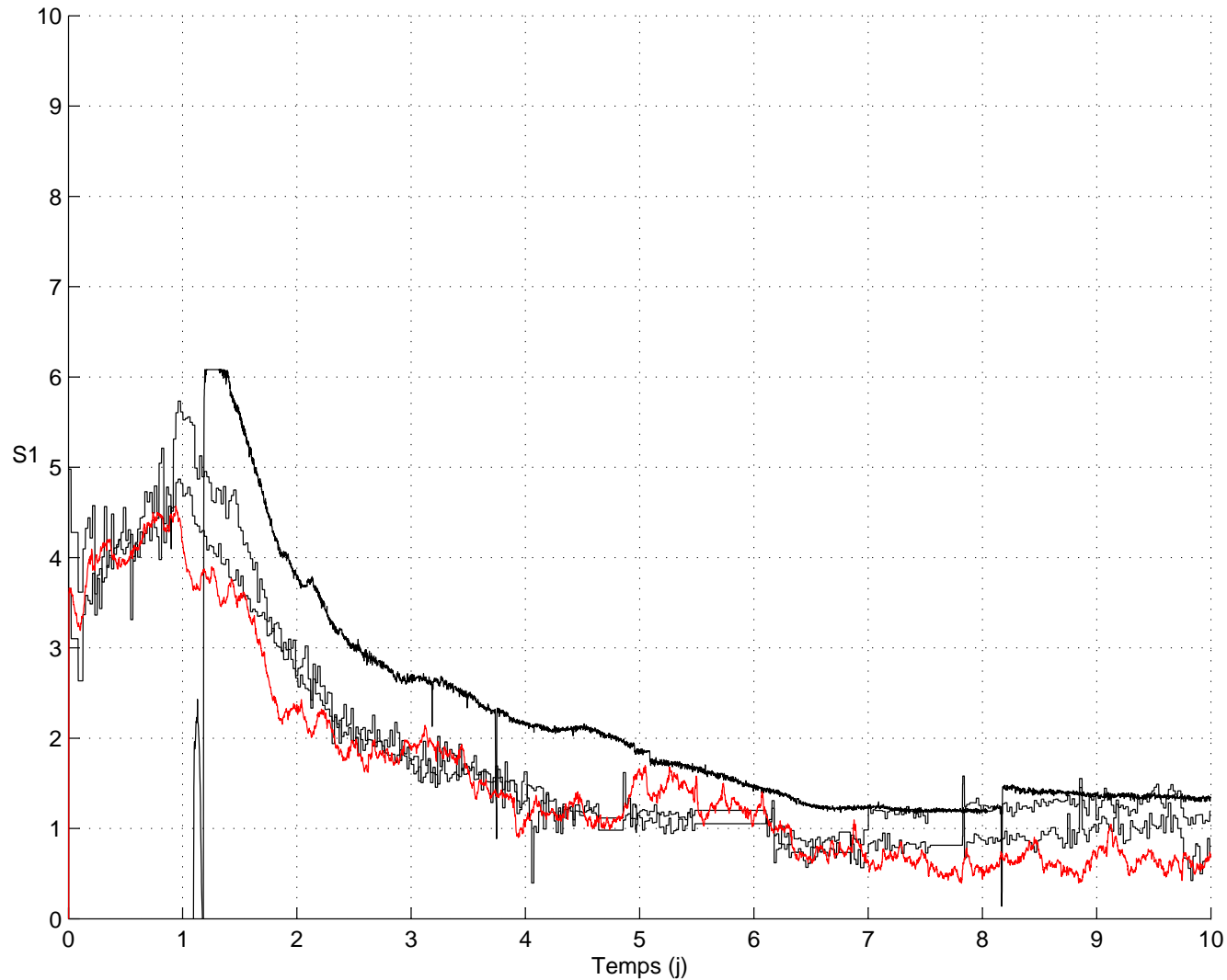
$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_1 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2} + a_8 * \varepsilon_8$$

avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

**Pour le filtrage :**

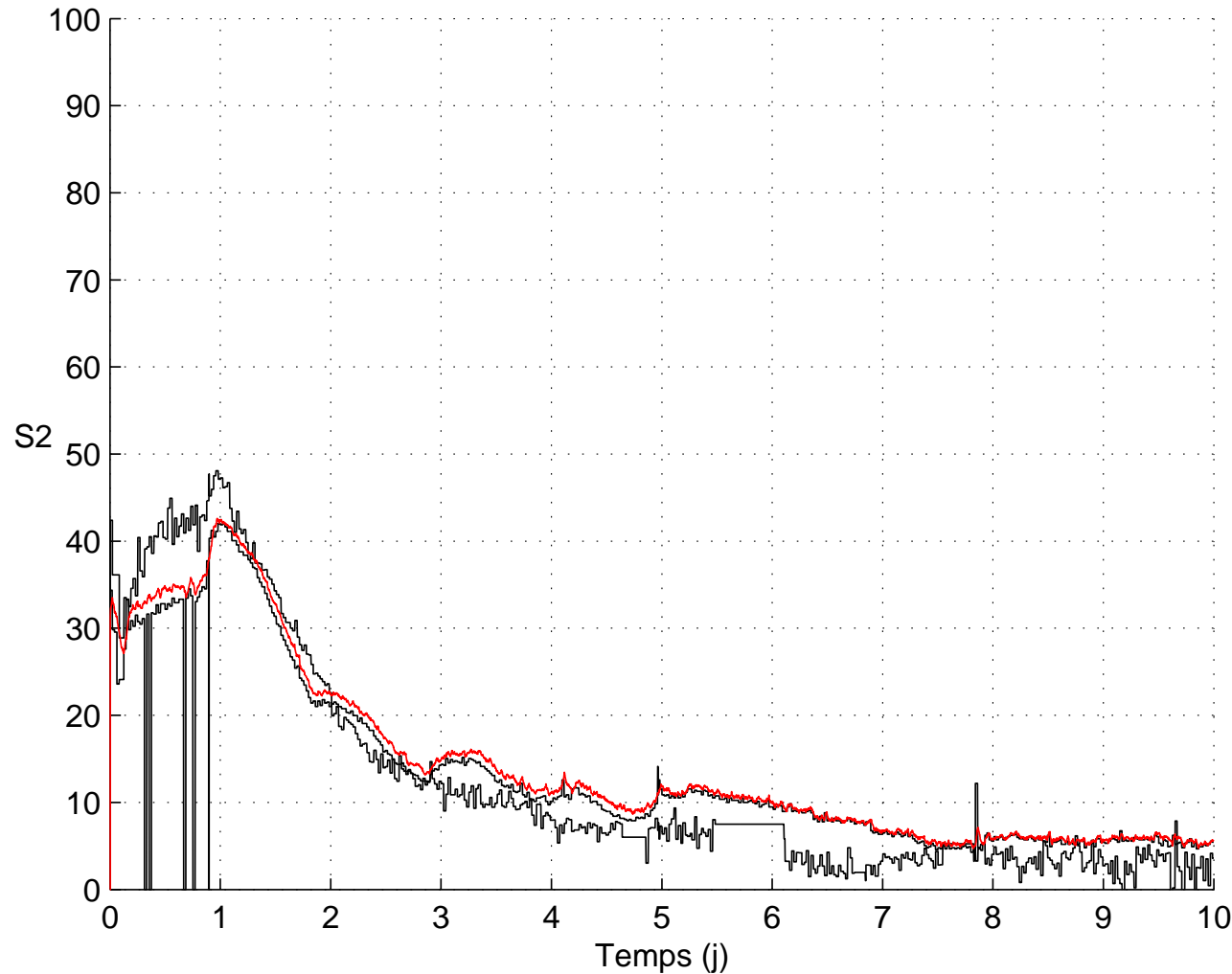
- Variables observées :  $Z, C_{ti}, Q_{CO_2}, Q_{CH_4}$  et pH
- Variables estimées :  $B1, B2, S1, S2$
- Paramètres estimés :  $a_1, \dots, a_8$ 
  - lois a priori :  $a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8 \sim \mathcal{U}[0 \ 0.3]$   
 $a_3, a_6 \sim \mathcal{U}[1 \ 4]$

# Résultat de filtrage sur données réelles



Estimation de  $S_1$ , avec  $n = 1000$  particules

# Résultat de filtrage sur données réelles



Estimation de  $S_2$ , avec  $n=1000$  particules

# Estimation des paramètres

Param.	Valeur	Ecart-type
$\mu_{max1}$	1.2	1
$\mu_{max2}$	0.74	0.9
$K_{S_1}$	7.1	5
$K_{S_2}$	9.28	13.7
$K_I^2$	256	320
$kla$	19.8	3.5
$\alpha$	0.5	0.4

Param.	Valeur	Ecart-type
$k_1$	42.14	18.94
$k_2$	116.5	113.5
$k_3$	268	52.31
$k_4$	50.6	143.6
$k_5$	343.6	75.8
$k_6$	453	90.9

- Fausses valeurs des paramètres car établies sous l'hypothèse de biomasses constantes.
- Informations a priori récupérées dans (Bernard & al. 2001) :

# Estimation des paramètres

Ratio	Valeur	Ecart-type
$k_2/k_1$	2.72	2.16
$k_6/k_3$	1.62	0.12
$k_5/k_3$	1.28	0.13
$k_4/k_1$	1.18	3.02

→ Intégration simple des contraintes dans l'algorithme du RCF avec paramètres inconnus.

# Estimation des paramètres

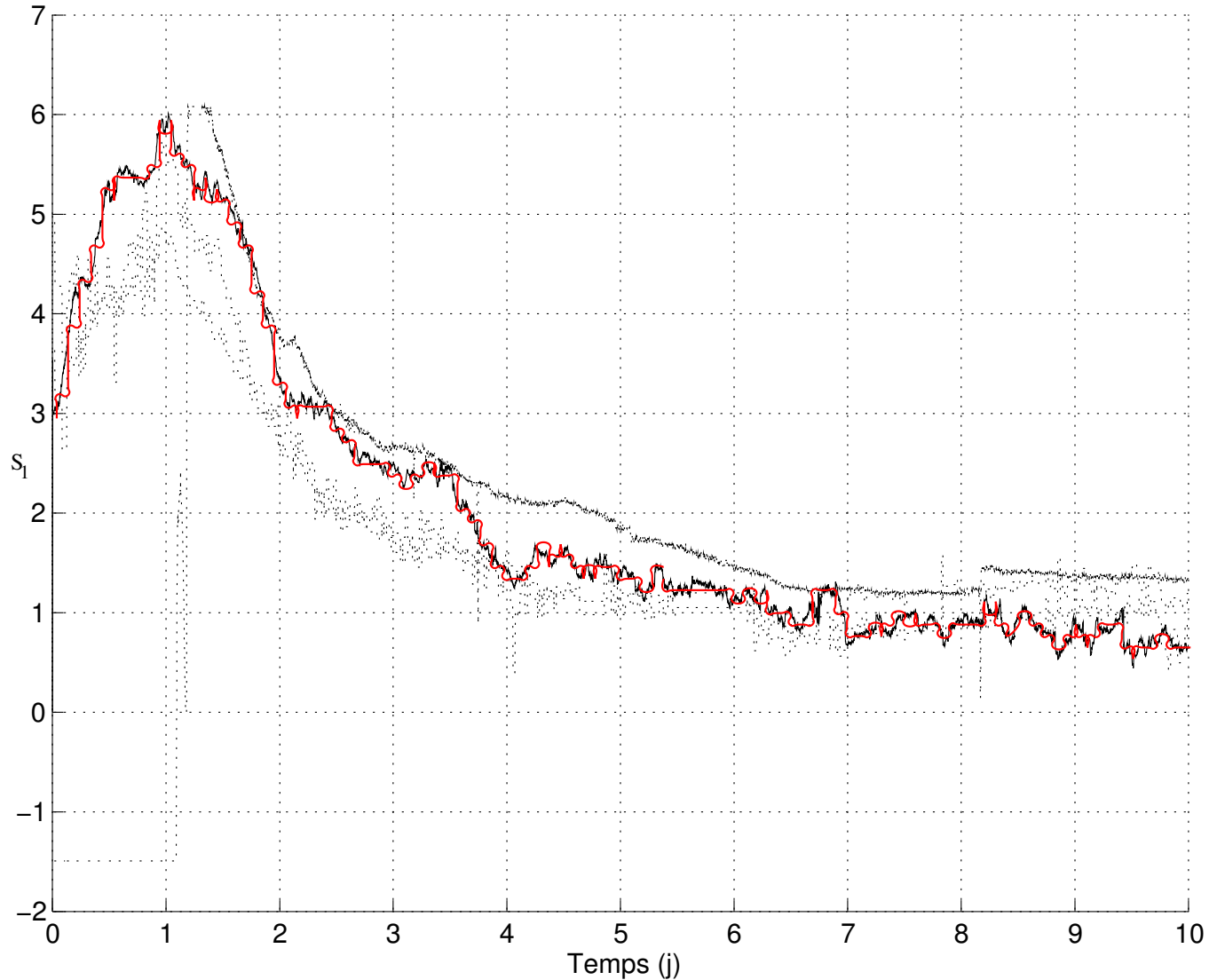
Ratio	Valeur	Ecart-type
$k_2/k_1$	2.72	2.16
$k_6/k_3$	1.62	0.12
$k_5/k_3$	1.28	0.13
$k_4/k_1$	1.18	3.02

→ Intégration simple des contraintes dans l'algorithme du RCF avec paramètres inconnus.

**Pour le filtrage :**

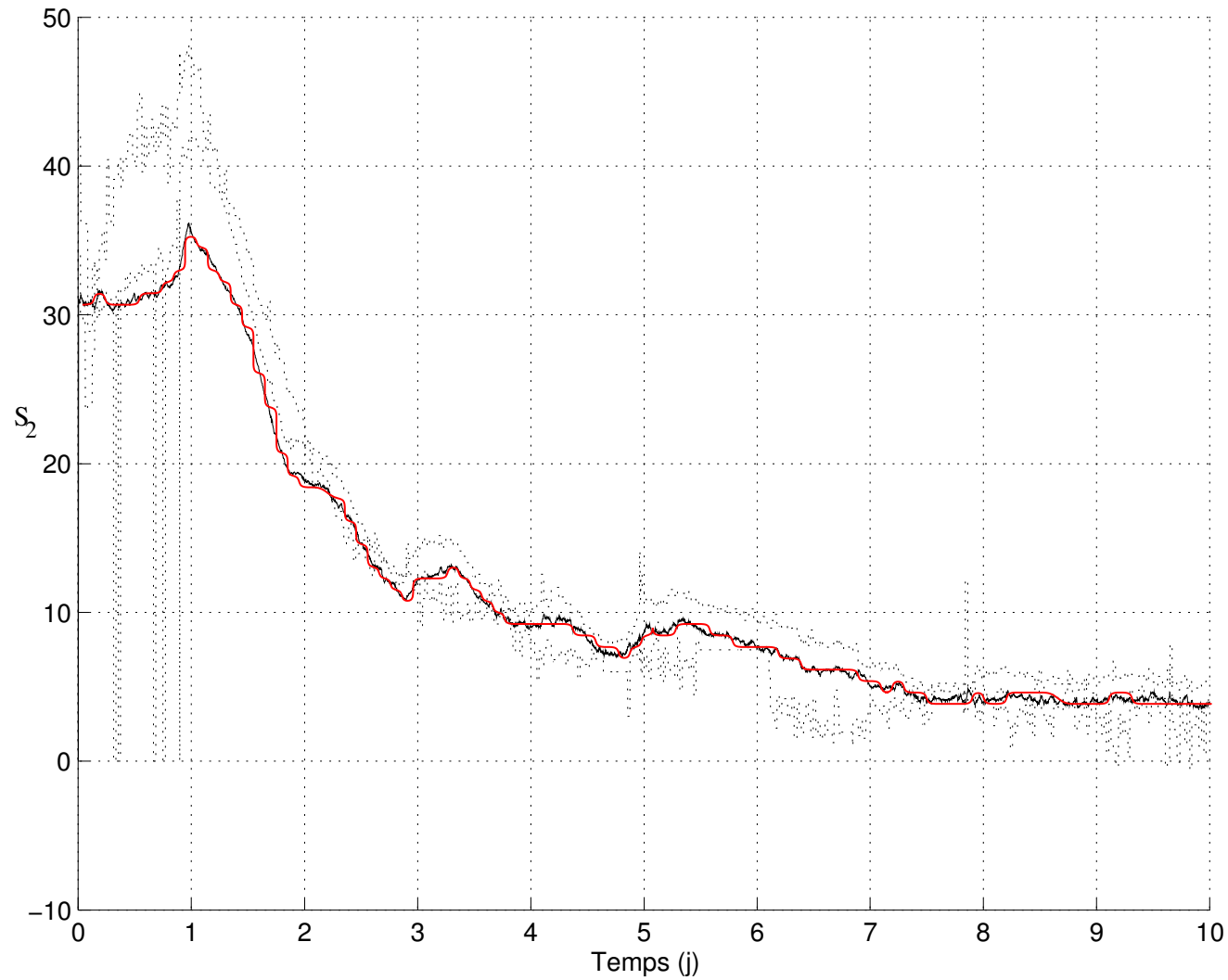
- Variables Observées :  $pH, Q_{CO_2}, Q_{CH_4}, C_{ti}, Z$
- Variables Estimées :  $B_1, B_2, S_1, S_2$ .
- Paramètres Estimés :  $\mu_{max1}, \mu_{max2}, K_{S_1}, K_{S_2}, K_I^2, kla, \alpha, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$

# Filtrage avec paramètres estimés



Evolution de  $S_1$

# Filtrage avec paramètres estimés



Evolution de  $S_2$



# Paramètres estimés

Paramètre	Estimation	Paramètre	Estimation
$\mu_{max1}$	1.0695	$k_1$	41.2381
$\mu_{max2}$	0.4713	$k_2$	130.6217
$K_{S_1}$	6.5279	$k_3$	260.7891
$K_{S_2}$	9.6898	$k_4$	50.1992
$K_I^2$	314.4378	$k_5$	324.0013
$k_{la}$	20.3468	$k_6$	423.7462
$\alpha$	0.5582		

Ecart-type	Valeur utilisée	Ecart-type	Valeur utilisée
$a_1$	0.025	$a_5$	1.00
$a_2$	0.05	$a_6$	0.02
$a_3$	0.01	$a_7$	0.05
$a_4$	0.01	$a_8$	2.00