Université Paul Valéry, Montpellier III

E16XMAEM – mathématiques
Année 2004–2005

Examen de mathématiques du 7 janvier 2005 – durée : 1 heure 30 – Sujet 1

Exercice I On donne la suite des notes obtenues par un étudiant lors de 10 devoirs.

Numéro du devoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Note	5	7	9	15	13	3	9	17	11	2

Question I-1 Quelle est la note moyenne ?
Réponse La population est l'ensemble des 10 devoirs. L'effectif total est donc 10. Le caractère étudié (on l'appelle Y) est la note associée à chaque devoir. On a donc le tableau suivant

Modalités	2	3	5	7	9	11	13	15	17
Effectifs	1	1	1	1	2	1	1	1	1

La moyenne est donc

$$\mathrm{Moy}(Y) = \frac{1\times 2 + 1\times 3 + 1\times 5 + 1\times 7 + 2\times 9 + 1\times 11 + 1\times 13 + 1\times 15 + 1\times 17}{10} = 9,1.$$

$$\boxed{\text{La note moyenne est } 9,1.}$$

Question I-2 Quelle est la variance des notes obtenues ?
Réponse La variance peut est la moyenne des écarts quadratiques à la moyenne. On peut la calculer en faisant la moyenne des carrés puis en retirant le carré de la moyenne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \frac{1\times 2^2 + 1\times 3^2 + 1\times 5^2 + 1\times 7^2 + 2\times 9^2 + 1\times 11^2 + 1\times 13^2 + 1\times 15^2 + 1\times 17^2}{10} - 9,1^2\\ &= 22,5.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La variance des notes obtenues est } 22,5.}$$

Question I-3 Donner l'équation de la droite de régression linéaire de la note en fonction du numéro de devoir.
Réponse Si on appelle X le caractère « numéro du devoir » et Y le caractère « note du devoir », on veut calculer l'équation de la droite de régression de Y en X. Cette droite a pour équation

$$y = ax + b.$$

Pour calculer a, on utilise la formule

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$$

et pour calculer b, on utilise le fait que le centre de gravité dont les coordonnées sont $(\mathrm{Moy}(X), \mathrm{Moy}(Y))$ est sur la droite.

On a

$$\mathrm{Moy}(X) = \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 + 1\times 4 + 1\times 5 + 1\times 6 + 1\times 7 + 1\times 8 + 1\times 9 + 1\times 10}{10} = 5,5$$

puis

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1\times 5 + 2\times 7 + 3\times 9 + 4\times 15 + 5\times 13 + 6\times 3 + 7\times 9 + 8\times 17 + 9\times 11 + 10\times 2}{10} - 9,1\times 5,5\\ &= 0,65.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{1\times 1^2 + 1\times 2^2 + 1\times 3^2 + 1\times 4^2 + 1\times 5^2 + 1\times 6^2 + 1\times 7^2 + 1\times 8^2 + 1\times 9^2 + 1\times 10^2}{10} - 5,5^2 \\ &= 8,25.\end{aligned}$$

Ainsi

$$a = \frac{0,65}{8,25} = 0,079.$$

Ensuite, le point $(\mathrm{Moy}(X), \mathrm{Moy}(Y))$ est sur la droite donc

$$9,1 = 0,079 \times 5,5 + b$$

d'où

$$b = 8,67.$$

$\boxed{\text{L'équation de la droite de régression de la note en fonction du numéro de devoir est } y = 0,079x + 8,67.}$

Exercice II Vous empruntez 1000 € au taux de 10%. Votre banquier propose que vous remboursiez 100 € à la fin de la première année, 200 € à la fin de la deuxième, 700 € à la fin de la troisième et le solde à la fin de la dernière.

Question II-1 Quel est le montant de la dernière annuité versée ?

Réponse On va donner deux solutions. L'une d'elle consiste à utiliser directement une formule donnée dans le formulaire. L'autre consiste à redémontrer cette formule dans le cas particulier de l'exercice.

Première solution– La somme empruntée est $D_0 = 1000$ € Le taux d'intérêt est $i = 10\% = 0,1$. La première annuité est $A_1 = 100$ €, la deuxième est $A_2 = 200$ €, la troisième est $A_3 = 700$ € et la dernière A_4 est celle que l'on cherche à évaluer. On a

$$D_0 = \sum_{k=1}^{4} (1+i)^{-k} A_k = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \frac{A_4}{(1+i)^4}.$$

Ainsi, après multiplication par $(1+i)^4$,

$$D_0(1+i)^4 = A_1(1+i)^3 + A_2(1+i)^2 + A_3(1+i) + A_4 \tag{1}$$

et enfin

$$A_4 = D_0(1+i)^4 - A_1(1+i)^3 - A_2(1+i)^2 - A_3(1+i).$$

On calcule

$$A_4 = 1000 \times 1,1^4 - 100 \times 1,1^3 - 200 \times 1,1^2 - 700 \times 1,1 = 319.$$

$\boxed{\text{Le montant de la dernière annuité est } A_4 = 319\,€.}$

Remarque – L'expression (1) peut s'interpréter de la façon suivante. La somme empruntée, D_0, produit un intérêt pendant 4 annuités ; à la fin de la quatrième période, cette somme est donc devenue $D_0(1+i)^4$. Pour rembourser cette somme, on imagine placer A_1 à la fin de la première période, A_2 à la fin de la deuxième, A_3 à la fin de la troisième et A_4 à la fin de la quatrième et à la fin de la quatrième période, on utilise l'argent placé pour rembourser l'emprunt. La somme A_1 reste placée pendant 3 périodes, elle devient donc $A_1(1+i)^3$; la somme A_2 reste placée pendant 2 périodes, elle devient donc $A_2(1+i)^2$; la somme A_3 reste placée pendant 1 période, elle devient donc $A_3(1+i)$. À la fin de la quatrième période, on a donc placé

$$A_1(1+i)^3 + A_2(1+i)^2 + A_3(1+i) + A_4.$$

Cette somme doit couvrir toute la somme empruntée et les intérêts produits par cette somme ce qui conduit à l'égalité (1).

Deuxième solution–

- Au début de la première periode, la dette est $D_0 = 1000$ €. Cette dette produit un intérêt de sorte qu'après une période, il faut rembourser $D_0(1+i) = 1000 \times 1,1 = 1100$ €. On rembourse $A_1 = 100$ € après quoi, il reste à rembourser $D_1 = 1100 - 100 = 1000$ €.
- Au début de la deuxième periode, la dette est donc $D_1 = 1000$ €. Cette dette produit un intérêt de sorte qu'après une période, il faut rembourser $D_1(1+i) = 1000 \times 1,1 = 1100$ €. On rembourse $A_2 = 200$ € après quoi, il reste à rembourser $D_2 = 1100 - 200 = 900$ €.
- Au début de la troisième periode, la dette est donc $D_2 = 900$ €. Cette dette produit un intérêt de sorte qu'après une période, il faut rembourser $D_2(1+i) = 900 \times 1,1 = 990$ €. On rembourse $A_2 = 700$ € après quoi, il reste à rembourser $D_3 = 990 - 700 = 290$ €.
- Au début de la quatrième periode, la dette est donc $D_3 = 290$ €. Cette dette produit un intérêt de sorte qu'après une période, il faut rembourser $D_3(1+i) = 290 \times 1,1 = 319$ €. La dernière annuité doit annuler la dette de sorte que cette dernière annuité est $A_4 = 319$ €.

Le montant de la dernière annuité est $A_4 = 319$ €.

Question II-2 Quel aurait été le montant de l'annuité si le remboursement avait eu lieu avec quatre annuités constantes ?

Réponse Si l'on rembourse un emprunt de D_0 sur n années au taux d'intérêt annuel i par des annuités constantes de valeurs a, on a

$$a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Ici, $D_0 = 1000$ €, $n = 4$ et $i = 10\% = 0,1$. Ainsi,

$$a = 1000 \times \frac{0,1}{1-1,1^{-4}} = 315,5.$$

Le remboursement par annuités constantes se ferait donc avec des annuités de 315,5 €.

Exercice III

La 120ᵉ ligne d'un tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par mensualités constantes est

Dette due	Intérêt	Amortissement
649232,34 €	3246,16 €	3918,15 €

Question III-1 Quel est le taux d'intérêt mensuel pratiqué ?

Réponse La dette due en début de 120ᵉ période est $D_{119} = 649232{,}34$ €. Si i le taux d'intérêt mensuel, l'intérêt produit par D_{119} pendant la 120ᵉ période est $I_{120} = D_{119}i$. On en déduit

$$i = \frac{I_{120}}{D_{119}} = \frac{3246,16}{649232,34} = 0,005.$$

Le taux d'intérêt mensuel pratiqué est 0,5%.

Question III-2 Quel est le taux d'intérêt annuel équivalent ?

Réponse Si i est le taux mensuel équivalent au taux annuel i_a, on a

$$i = (1+i_a)^{1/12} - 1.$$

Ainsi,

$$i + 1 = (1+i_a)^{1/12} \quad \text{puis} \quad 1 + i_a = (1+i)^{12}.$$

On a alors

$$i_a = (1+i)^{12} - 1 = 1,005^{12} - 1 = 0,617.$$

Le taux d'intérêt annuel équivalent est $6,17\%$.

Question III-3 Quelle est la mensualité ?

Réponse La mensualité versée en fin de 120ᵉ période, A_{120}, couvre l'intérêt produit pendant cette période, I_{120} et l'amortissement de cette période M_{120}. Ainsi,

$$A_{120} = I_{120} + M_{120} = 3246,16 + 3918,15 = 7164,31.$$

Puisque les mensualités sont constantes, on trouve que

$$\boxed{\text{la mensualité est } 7164{,}31\,€.}$$

Question III-4 On peut montrer que la durée de l'emprunt est 20 ans. Quelle est la somme empruntée ?
Réponse La somme empruntée est D_0 avec

$$D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

On a $i = 0,005$, $a = 7164,31$ et $n = 20 \times 12 = 240$. On trouve

$$D_0 = 999999.91.$$

$$\boxed{\text{La somme empruntée est } 999999.91\,€.}$$

Remarque 1 – Dans la 120e ligne, les sommes sont données au centime près et non avec plus de précision. Le lecteur consciencieux vérifiera qu'un emprunt de 1 million d'euros, remboursable en 240 mensualités au taux mensuel de $0,5\%$ conduit à la même 120e ligne que celle de l'énoncé.

Remarque 2 – L'énoncé affirme que la durée de l'emprunt est 20 ans. On explique comment le montrer. Si n est le nombre de mensualités, la dette en début de 120e période, D_{119} est

$$D_{119} = a\frac{1-(1+i)^{119-n}}{i}.$$

On a donc

$$\frac{D_{119}i}{a} = 1-(1+i)^{119-n} \quad \text{puis} \quad (1+i)^{119-n} = 1-\frac{D_{119}i}{a}.$$

On en déduit

$$119-n = \frac{\ln\left(1-\dfrac{D_{119}i}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$

et donc

$$n = 119-\frac{\ln\left(1-\dfrac{D_{119}i}{a}\right)}{\ln(1+i)}.$$

On a $D_{119} = 649232,34$, $a = 7164,31$ et $i = 0,005$. Ainsi, $n = 240$. L'emprunt se fait sur 240 mois, donc 20 ans.