Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

AES option mathématique
Année 2004–2005

Un exercice supplémentaire : prêt immobilier – Correction

— SOLUTION —

I)

1) On a vu en cours que la valeur actuelle d'un prêt sur n périodes en remboursant a par période au taux périodique i est

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Ici, la période est le mois et le taux périodique est donc $i_p = \frac{i}{12}$. Le nombre de périodes étant $12N$, on obtient

$$\boxed{V_0 = 12a\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}}{i}.} \tag{1}$$

2) De (1), on déduit

$$a = \frac{i V_0}{12\left[1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}\right]}.$$

Si V_0 =150000 €, $i = 0,045$ et $N = 15$, on trouve

$$\boxed{a = 1147,49\,€}$$

Si V_0 =150000 €, $i = 0,0475$ et $N = 20$, on trouve

$$\boxed{a = 969,34\,€}$$

3) En utilisant (1) avec a =650 €, $i = 0,0475$ et $N = 20$, on trouve que la somme empruntable est

$$\boxed{V_0 = 100584,37\,€.}$$

★ **4)** L'intérêt à payer pendant la période k est

$$I_k = D_{k-1}\, i_p.$$

Puisque l'annuité est constante égale à a, on a

$$D_{k-1} = \frac{a}{i_p}\left[1-(1+i_p)^{k-1-n}\right]$$

si le nombre total d'annuités est n. Ainsi,

$$\begin{aligned}I(j,\ell) &= I_j + I_{j+1} + \cdots + I_\ell \\ &= (D_{j-1} + D_j + \cdots + D_{\ell-1})\, i_p \\ &= a\left[1-(1+i_p)^{j-1-n} + 1-(1+i_p)^{j-n} + \cdots + 1-(1+i_p)^{\ell-1-n}\right].\end{aligned}$$

Le terme 1 apparaît une fois dans D_{j-1}, une fois dans D_j, etc, il apparaît $\ell-j+1$ fois au total et donc, en sortant chacun de ces 1 et en factorisant par $(1+i_p)^{j-1-n}$ le terme restant, on a

$$I(j,\ell) = a(\ell-j+1) - \frac{a}{(1+i_p)^{n-j+1}}\left[1+(1+i_p)+\cdots+(1+i_p)^{\ell-j}\right].$$

On reconnaît la somme des $\ell-j+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $1+i_p$, d'où

$$\boxed{I(j,\ell) = a(\ell-j+1) - \frac{a}{i_p}\frac{(1+i_p)^{\ell-j+1}-1}{(1+i_p)^{n-j+1}}.}$$

5) L'année k commence au mois $12(k-1)+1$ et termine au mois $12k$, donc $I(k) = I(12k-11, 12k)$ et puisque $i_p = \frac{i}{12}$, on a

$$\boxed{I(k) = 12a - \frac{12a}{i}\frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}-1}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12(N-k+1)}}.}$$

L'amortissement est ce qui contribue au remboursement de la somme due, une fois enlevé ce qu'on a utilisé pour rembourser l'intérêt. En un an, on a versé douze mensualités de valeur a. L'amortissement de l'année k est donc $12a - I(k)$, c'est-à-dire

$$\boxed{M(k) = \frac{12a}{i}\frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}-1}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12(N-k+1)}}.}$$

Le capital restant dû au début de la période $p+1$ (donc du *mois* $p+1$) est

$$D_p = a\frac{1-(1+i_p)^{p-n}}{i_p}.$$

Le début de l'année $k+1$ étant le début de la période $12k+1$, on a $D(k) = D_{12k}$ et donc

$$\boxed{D(k) = 12a\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12k-12N}}{i}.}$$

6) L'intérêt versé la première année est $I(k)$ avec $k=1$, l'amortissement versé la première année est $M(k)$ avec $k=1$ et la somme due en fin de première année est $D(k)$ avec $k=1$. On a

$$I(1) = 4711{,}09\,€ \quad M(1) = 3088{,}91\,€ \quad D(1) = 97495{,}46\,€.$$

En faisant de même avec $k=20$, on peut compléter le tableau suivant.

Année	Intérêt versé pendant l'année	Amortissement versé pendant l'année	Capital dû en fin d'année
1	4711,09 €	3088,91 €	97495,46 €
3	4403,88 €	3396,12 €	90860,46 €
9	3286,51 €	4513,49 €	66727,26 €
15	1801,51 €	5998,49 €	34653,89 €
20	197,04 €	7602,96 €	0 €

Au total, l'emprunt a coûté 156000 €. Le coût de cet emprunt est donc 55415,63 €, soit 55% de la somme obtenue au début de cet emprunt.

★ **7)** Pendant L années, on emprunte une fraction x de la somme totale empruntée à 0% et on emprunte le reste (donc une fraction $1-x$ de la somme totale empruntée) au taux i pendant N années. On rembourse a_1 par mois pour l'emprunt à 0% et a_2 par mois pour l'autre emprunt (puisque les annuités sont supposées constantes, on continue à rembourser a_2 par mois même une fois l'emprunt à 0% remboursé). Pour l'emprunt à 0%, on a donc

$$xV_0 = 12La_1 \tag{2}$$

(les annuités mensuelles de a_1 sont versées pendant L années, soit $12L$ mois, la valeur prêtée est xV_0 et il n'y a pas d'intérêts). Pour le second prêt, on a

$$(1-x)V_0 = 12a_2 \frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}}{i} \tag{3}$$

(voir la question 1). Les équations (2) et (3) donnent

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 &= \frac{xV_0}{12L} + \frac{(1-x)V_0}{12} \frac{i}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}} \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{x}{L} + (1-x)\frac{i}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}}\right)V_0. \end{aligned} \tag{4}$$

On veut rembourser $a = a_1 + a_2$ chaque mois, donc (4) donne

$$V_0 = \frac{12a}{\frac{x}{L} + (1-x)\frac{i}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}}}$$

et donc

$$\boxed{V_0 = \frac{12aL\left[1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12N}\right]x + (1-x)Li}.}$$

Ici, a =650 €, $L = 12$ ans, $N = 20$ ans, $i = 0,0475$ et $x = 0,2$ donc Monsieur Dupont peut emprunter

$$\boxed{V_0 = 99105,34.\text{€}}$$

★★ **8)** On garde les notations de la question précédente. La seule chose qui change est l'annuité du prêt à intérêt non nul. Elle est a_2 pendant les L premières années mais devient a pendant les années suivantes. La valeur actuelle de cet emprunt est donc

$$\begin{aligned} (1-x)V_0 &= \sum_{k=1}^{12L} a_2(1+i_p)^{-k} + \sum_{k=12L+1}^{12N} a(1+i_p)^{-k} \\ &= \frac{a_2}{i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12L}\right] + \frac{a}{(1+i_p)^{12L}i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12(N-L)}\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

D'autre part, pour le prêt à taux 0, on a

$$xV_0 = 12La_1$$

donc

$$a_1 = \frac{xV_0}{12L}.$$

Puisque $a_1 + a_2 = a$, on a

$$a_2 = a - \frac{xV_0}{12L}$$

et (5) devient

$$(1-x)V_0 = \frac{a - \frac{xV_0}{12L}}{i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12L}\right] + \frac{a}{(1+i_p)^{12(N-L)}i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12(N-L)}\right].$$

On en déduit

$$\boxed{V_0 = \frac{\frac{a}{i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12L}\right] + \frac{a}{(1+i_p)^{12(N-L)}i_p}\left[1-(1+i_p)^{-12(N-L)}\right]}{1-x+\frac{x}{12Li_p}\left[1-(1+i_p)^{-12L}\right]}.}$$

Ici, a =650 €, $L = 12$ ans, $N = 20$ ans, $i_p = 0,0475/12$ et $x = 0,2$ donc Monsieur Dupont peut emprunter

$$\boxed{V_0 = 112065,26.\text{ €}}$$

9) Monsieur Dupont peut acheter un appartement de 56 mètres carrés.