Examen de mathématiques du 7 janvier 2005 – durée : 1 heure 30 – Sujet 1

En rendant sa copie, le candidat reconnaît avoir pris connaissance des instructions suivantes.

Aucun document n'est autorisé

L'utilisation d'une calculatrice **personnelle** est autorisée

L'utilisation d'un téléphone portable, *même comme calculatrice* est interdite

L'échange de calculatrice n'est **en aucun cas** autorisé.

Le sujet contient 3 exercices et un formulaire

Exercice I On donne la suite des notes obtenues par un étudiant lors de 10 devoirs.

Numéro du devoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Note	5	7	9	15	13	3	9	17	11	2

Question I-1 Quelle est la note moyenne ?
Question I-2 Quelle est la variance des notes obtenues ?
Question I-3 Donner l'équation de la droite de régression linéaire de la note en fonction du numéro de devoir.

Exercice II Vous empruntez 1000 € au taux de 10%. Votre banquier propose que vous remboursiez 100 € à la fin de la première année, 200 € à la fin de la deuxième, 700 € à la fin de la troisième et le solde à la fin de la dernière.
Question II-1 Quel est le montant de la dernière annuité versée ?
Question II-2 Quel aurait été le montant de l'annuité si le remboursement avait eu lieu avec quatre annuités constantes ?

Exercice III La 120^{e} ligne d'un tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par mensualités constantes est

Dette due	Intérêt	Amortissement
649232,34 €	3246,16 €	3918,15 €

Question III-1 Quel est le taux d'intérêt mensuel pratiqué ?
Question III-2 Quel est la taux d'intérêt annuel équivalent ?
Question III-3 Quelle est la mensualité ?
Question III-4 On peut montrer que la durée de l'emprunt est 20 ans. Quelle est la somme empruntée ?

— Annuités —

Valeur acquise d'une suite d'annuités temporaire certaine

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{n-k} A_k.$$

Cas particulier des annuités constantes de début de période

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Cas particulier des annuités constantes de fin de période

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Valeur actuelle d'une suite d'annuités temporaire certaine

$$V_0 = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{-k} A_k.$$

Cas particulier des annuités constantes de début de période

$$V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Cas particulier des annuités constantes de fin de période

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

— Emprunts indivis —

Dette en début de $p+1^{\text{e}}$ période

$$D_p = \sum_{k=p+1}^{n} (1+i)^{p-k} A_k.$$

Somme empruntée

$$D_0 = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} A_k.$$

Cas particulier des annuités constantes

$$D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

$$a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

$$\begin{aligned} D_p &= a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i} \\ &= D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}. \end{aligned}$$

Les amortissements sont en suite géométrique de raison $1+i$.