

Fiche d'exercices 1 : pourcentages–taux–proportions

SAVOIR

En statistique ou en mathématiques financières, on utilise souvent des proportions pour comparer des grandeurs. Les proportions peuvent être exprimées sous forme de pourcentages. Dans ce cas, on parle parfois de *taux*. Par exemple, un *taux d'intérêt* est la proportion exprimée en pourcentage de l'intérêt sur la somme de départ.

L'écriture d'un nombre sous forme de pourcentage est une écriture particulière de ce nombre. Ce n'est *pas* un autre nombre. Si a est un nombre $a\%$ représente le nombre $a/100$. Ainsi, $5\% = 0,05$, mais aussi $2000\% = 20$.

Lien entre l'écriture décimale et l'écriture sous forme de pourcentage

Pour écrire un nombre décimal sous forme de pourcentage, il faut déplacer la virgule de deux décimales vers la *droite* (éventuellement après avoir ajouté des 0) et ajouter le symbole % :

$$1,234 = 123,4\% \quad 12 = 12,00 = 1200\% \quad -0,4 = -0,40 = -40\%.$$

Pour écrire un pourcentage sous forme décimale, il faut déplacer la virgule de deux décimales vers la *gauche* et enlever le symbole % :

$$3,21\% = 003,21 = 0,0321 \quad -123\% = -1,23.$$

Variations et proportions

Dire qu'une grandeur augmente d'une proportion p , c'est dire que la grandeur après augmentation est la grandeur avant augmentation augmentée de la fraction p de la grandeur avant augmentation. On retiendra

Augmenter une grandeur d'une proportion p , c'est la multiplier par $1 + p$.

Dire qu'une grandeur diminue d'une proportion p , c'est dire que la grandeur après diminution est la grandeur avant diminution diminuée de la fraction p de la grandeur avant diminution. On retiendra

Diminuer une grandeur d'une proportion p , c'est la multiplier par $1 - p$.

1) a) Écrire les nombres suivants sous forme de pourcentages :

$$2,007; 1234; \frac{5}{3} + 1; 6,78; 12,02 \cdot 10^{-3}; 25; -10; -2 \cdot 10^7; \frac{26,3}{4}; -0,51.$$

b) Écrire les nombres suivants sous forme décimale :

$$2,007\%; -19,6\%; 0,0324\%; \frac{100\%}{4}; 22\% \times 8\%; 22\% \times 8; \frac{45,6\%}{30\%}; \frac{45,6\%}{30}; \frac{45,6}{30\%}.$$

2) Sur une carte « au vingt-cinq mille », 1 centimètre correspond à 25000 centimètres sur le terrain. Quelle longueur réelle est représentée par 3,42 centimètres sur la carte. Par quelle distance sur la carte est représentée une distance réelle de 341 mètres ?

3) Sous la pression atmosphérique, un gaz G occupe un volume de $2 m^3$. Si on ne change pas la température d'un gaz, mais qu'on change sa pression P , son volume devient V de façon que le produit PV reste constant. Que devient le volume du gaz G s'il prend une pression de 6 fois la pression atmosphérique ?

4) [Concours lufm, Midi-Pyrénées, 1997] La toise du Châtelet était une unité de mesure utilisée au XVIII^e siècle. Une toise valait 6 pieds, un pied valait 12 pouces, un pouce valait 12 lignes et une ligne valait 12 points. Quel est le rapport des longueurs A et B si A vaut une toise dix pouces neuf points et B vaut quatre toises un pied dix lignes et neuf points.

5) L'Unité Astronomique (U.A.) est une unité de distance adaptée pour les mesures dans les systèmes solaires. Elle est égale à la distance de la Terre au Soleil. La lumière met 8 minutes et 19 secondes pour nous parvenir du Soleil à la vitesse de 300000 kilomètres par seconde. Le Parsec est une autre unité astronomique utilisée pour l'étude des galaxies et valant 206264,8 U.A. Le Big bang ayant eu lieu il y a 13,7 milliards d'années, l'étoile la plus lointaine que l'on puisse observer est située à une distance que la lumière parcourt en 13,7 milliards d'années. [La galaxie la plus lointaine connue en septembre 2005 a été découverte en février 2004 par une équipe franco-suisse d'astronomes à l'aide du du *Very Large Telescope de Paranal* (Chili). Cette galaxie a 13,2 milliards d'années] ¹

a) À quelle distance, exprimée en kilomètres le Soleil se trouve-t-il de la Terre ? Donner la valeur en kilomètres d'une U.A.

b) Donner la valeur en kilomètres d'un parsec.

c) Quelle est la distance en kilomètres, en U.A. puis en parsec de l'étoile la plus lointaine que l'on puisse observer ?

6) [Concours lufm, Montpellier, 2000] On utilise le système d'échange suivant. Contre 9 jetons rouges, on a 20 jetons jaunes. Contre 15 jetons rouges, on a 16 jetons bleus. Combien a-t-on de jetons bleus en échange de 25 jetons jaunes ?

7) Un groupe d'ouvriers travaillant 12 heures par jour met 8 jours pour construire 32 mètres d'un ouvrage. Combien ces mêmes ouvriers, travaillant 8 heures par jour mettront-ils pour construire 18 mètres d'ouvrage ?

8) [Concours lufm, Montpellier, 2000] On partage 8500 € entre quatre personnes. La part de A est la moitié de la part de B et le tiers de la part de C . C a 157 € de moins que D . Quelle affirmation est vraie ?

– A a plus d'argent que C ;

¹ Consulter <http://www.eso.org/outreach/press-rel/pr-2004/pr-04-04.html> .

- D a moins d'argent que C ;
- C'est B qui a le plus d'argent ;
- C'est D qui a le plus d'argent ;
- Aucune affirmation n'est vraie.

9) Le loyer mensuel de votre appartement est de 419 €. Vous le quittez le 4 juillet. Quel loyer devez-vous payer pour le mois de juillet sachant que cette somme est calculée au *pro rata* du nombre de jours de location.

10) a) Sur 250 candidats à un concours, 60 ont été admis. Quel est le pourcentage de candidats admis ? b) Dans un amphithéâtre il y a 150 étudiants dont 80% d'étudiantes. Quel est le nombre d'étudiantes ? c) Dans la classe de seconde 4 du Lycée Guillaume de Machaut il y a 60% de filles. Cette classe représente 4% de l'effectif du lycée. Quelle est la proportion de filles de seconde 4 dans ce lycée ?

11) [Concours lufm, Midi-Pyrénées, 2002] Dans une école, 40% des élèves ont une mauvaise vue ; 70% des élèves ayant une mauvaise vue portent des lunettes ; les 30% restant portent des lentilles de contact. Dans cette école, on compte 21 paires de lunettes. Quelle affirmation est vraie ?

- 45 élèves ont une mauvaise vue ;
- 30 élèves ont une bonne vue ;
- on compte 70 élèves dans l'école ;
- aucune des affirmations précédente n'est vraie.

12) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Évidemment, vous devez justifier votre réponse :

1. si le prix d'un article augmente de 5%, le prix de trois articles augmente de 15% ;
2. un pourcentage est toujours inférieur à 100 ;
3. avant les soldes, une robe coûtait 110 €. Pendant les soldes, elle coûte 100 €. La réduction est donc de 10% ;
4. si une grandeur est multipliée par 3 alors elle augmente de 300% ;
5. En France en 1954, les agriculteurs représentaient 34,8% de la population active, 20 ans après, ils représentent 17,9% de la population active. Le nombre d'agriculteurs a donc été divisé par 2.

13) a) Le prix hors taxe d'un objet est 60 €. Quel est son prix TTC (le taux de TVA appliqué à cet objet est 19,6%) ? b) Après augmentation de 2%, le prix d'un article est 10 €. Quel était son prix avant augmentation ? c) Les restaurateurs français réclament que le taux de TVA appliqué à un repas passe de 19,6% à 5,5%. Si la baisse du taux de TVA était entièrement répercuté sur le prix du repas, quel serait le taux de diminution du prix d'un repas ?

14) [Concours lufm, Midi-Pyrénées, 2003] Un article augmente de 15% puis subit successivement une baisse de 20% et une augmentation de 20%. Quel son augmentation en pourcentage après ces trois changements ?

15) [Concours lufm, Midi-Pyrénées, 1997] Dans une école primaire, de 1996 à 1997 le nombre d'élèves a baissé de 10% ; par contre le pourcentage de filles est passé de 50% à 55%. Quelle est l'évolution en % du nombre de filles ?

16) Pour connaître le montant de son impôt sur le revenu, il faut connaître son revenu (noté D) et son nombre de parts (noté N , il dépend de la composition de la famille (une part par adulte, une demie-part par enfant pour les deux premiers et une part par enfant pour les enfants suivants). Pour calculer² le revenu imposable (noté R) on retire 10% (de frais professionnels)

²Source : <http://www.impots.gouv.fr/> septembre 2004

puis 20% au résultat obtenu. On calcule ensuite le quotient familiale (noté QF) en divisant R par N . On sépare alors ce quotient familial en tranches, et à chaque tranche, on applique le taux correspondant suivant le tableau ci-dessous :

Partie du QF comprise dans l'intervalle	taux appliqué en %
0 – 4262 €	0
4262 € – 8382 €	6,83
8382 € – 14753 €	19,14
14753 € – 23888 €	28,26
23888 € – 38868 €	37,38
38868 € – 47932 €	42,62
supérieur à 47932 €	48,09

(par exemple, pour un QF de 10000 €, on applique le taux 0% à 4262 € puis le taux 6,83% à 8382 € – 4262 € = 4120 € et enfin 19,14% à 10000 € – 8382 € = 1618 €). On obtient ainsi l'impôt par part et l'impôt total à payer (noté I) est l'impôt par part multiplié par le nombre de parts.

a) Une personne déclare un revenu de 33334 €. Calculer son revenu imposable. On suppose que son nombre de parts est 3 (cas d'un couple avec deux enfants). Calculer l'impôt sur le revenu qu'elle doit acquitter.

b) Compléter le tableau suivant.

Si QF est dans l'intervalle	l'impôt est
0 – 4262 €	0
4262 € – 8382 €	0,0683R-291,09N
8382 € – 14753 €	0,1914R-1322,92N
14753 € – 23888 €	0,2826R-2668,39N
23888 € – 38868 €	
38868 € – 47932 €	0,4262R-6883,66N
supérieur à 47932 €	0,4809R-9505,54N.

c) Est-il vrai qu'une personne dont le nombre de part est 1 et qui déclare un revenu de 85000 € verse près de la moitié de ce revenu en impôts ? Quel est la fraction de ce montant payée en impôts ?

d) Quel est l'impôt que paye une personne dont le nombre de part est 1 et ayant un revenu imposable de 47900 € ? Quel est l'impôt que paye une personne dont le nombre de part est 1 et ayant un revenu imposable de 48000 € ?

e) Pour une personne dont le nombre de part est 1, tracer la courbe de l'impôt payé en fonction du revenu imposable.