Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

AES option mathématique
Année 2005–2006

Fiche d'exercices 5 : mathématiques financières

SAVOIR

Si r est un nombre réel, une suite est dite *arithmétique de raison r* si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent auquel on a ajouté r. Soit u une telle suite de premier terme u_{n_0}, on a, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r, on a donc

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

Pour une telle suite, la somme des N premiers termes est

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_{n_0+i} = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+N-1} = Nu_{n_0} + \frac{(N-1)N}{2}. \tag{1}$$

L'ingrédient principal pour prouver la formule (1) est la formule

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

valable pour tout entier $n \geq 1$ (voir exercice 1 page suivante).

—

Soit $q \neq 1$ un nombre réel. Une suite est dite *géométrique de raison q* si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent multiplié par q. Soit u une telle suite de premier terme u_{n_0}, on a, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Si u est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q, on a donc

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Pour une telle suite, la somme des N premiers termes est

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_{n_0+i} = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \frac{1-q^N}{1-q}. \tag{2}$$

L'ingrédient principal pour prouver la formule (2) est la formule

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

valable pour tout entier $n \geq 1$ (voir exercice 2 page suivante).

NB. Pour plus de détails, on se reportera au cours « Suites » disponible à

http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/index.html

1) En effectuant l'addition

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

donner une formule compacte pour

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n.$$

2) En calculant

$$(1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1})$$

donner une formule compacte pour

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}.$$

3) Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre puis calculer les trois premiers termes. Lorsque la suite est arithmétique ou géométrique, calculer la somme des vingt-cinq premiers termes.

a) $u_n = -\sqrt{5}(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$;
b) $v_n = 1 + 4\sqrt{2}(n + \sqrt{3})$, $n \geq 1$;
c) $w_n = 7 \times (-\sqrt{7})^{5-2n}$, $n \geq -2$;
d) $x_n = 4 \times 5^{n-2}$, $n \geq 7$;
e) $y_{n+1} = y_n + 3$, $y_0 = 2$;
f) $z_{n+1} = 20z_n$, $z_1 = 1$;
g) $2t_n = t_{n-1} + 1$, $t_0 = 2$.

4) Une personne doit choisir entre deux contrats d'embauche, commençant le 1er juin 2004.
Contrat 1 : le salaire mensuel est 1220 € pendant la première année et augmente de 61 € le premier juin de chaque année.
Contrat 2 : le salaire mensuel est 1220 € pendant la première année et augmente de 5% le premier juin de chaque année.

a) Donner le formule donnant le salaire mensuel (en €) au cours de l'année numéro n, soit $M_1(n)$ pour le contrat 1 et $M_2(n)$ pour le contrat 2. On note que $M_1(1) = M_2(1) = 1220$.

b) Que vaudra le salaire mensuel pour chacun des contrats le 1er septembre 2012 ?

5) Une légende raconte que l'inventeur du jeu d'échecs demanda comme récompense un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la deuxième, quatre pour la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois jusqu'à la soixante-quatrième case.

a) Combien aurait-on dû mettre de grains de blé sur la soixante-quatrième case ?

b) Cent grains de blé pèsent environ 5 grammes. Quelle masse de blé l'inventeur du jeu d'échecs a-t'il reçu ?

c) D'après l'Organisation pour l'agriculture et l'alimentation (FAO), en 1998, la production de blé a été d'environ 615 millions de tonnes[1]. La légende est-elle plausible ?

6) On prévoit que le prix annuel d'une denrée augmentera de 8% chaque année. On désigne par u_0 le prix (en €) pour l'année 2004 et u_n le prix pour l'année $2004 + n$.

a) Exprimer u_n en fonction de u_0 et n.

b) En 2004, le prix de cette denrée est 48 €. Calculer le prix en 2009.

c) En quelle année le prix de la denrée dépasse-t'il 100 € pour la première fois ?

7) D'après l'Organisation des Nations Unies[2] (ONU), la population mondiale était de 3 milliards d'habitants en 1960 et 6 milliards en 1999.

Déterminer la valeur de la population mondiale en 2010 et l'année où celle–ci atteindra 10 milliards d'habitants dans chacune des hypothèses suivantes :

[1] Source : http://www.fao.org/docrep/004/w9687f03.htm
[2] Source : http://www.un.org/News/Press/docs/1998/19981027.pop684.html

1. l'accroissement annuel de la population mondiale a été constant entre 1960 et 1999. Il gardera la même constance à l'avenir ;
2. le taux d'accroissement annuel de la population mondiale a été constant entre 1960 et 1999. Il gardera la même constance à l'avenir.

SAVOIR

L'*intérêt* est la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (le prêteur) à un autre agent économique. Le *taux d'intérêt* par période est l'intérêt rapporté par une unité monétaire pendant une période.

—

Un capital est placé à *intérêts simples* si c'est le *capital de départ* qui produit l'intérêt pendant toute la durée du placement. On emprunte un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période. L'*intérêt total* à payer (le coût de l'emprunt) est

$$I_n = C_0 n i.$$

La *somme totale à rembourser* est

$$C_n = (1 + ni)C_0.$$

—

Un capital est placé à *intérêts composés* si, à la fin de chaque période, l'intérêt gagné est incorporé au capital pour produire lui aussi un intérêt. On emprunte un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période. Le capital à la fin des n périodes (appelé *valeur acquise* est

$$C_n = C_0(1 + i)^n.$$

L'*intérêt total* à payer (le coût de l'emprunt) est

$$I_n = [(1 + i)^n - 1]\, C_0.$$

On peut inversement calculer le capital qu'il faut placer au taux i par période pendant n périodes pour obtenir un capital C. Ce capital C_0 qu'il faut placer s'appelle la *valeur actuelle* et

$$C_0 = \frac{C}{(1 + i)^n}.$$

—

Le *taux proportionnel* au taux i pour une sous-période est le taux qui, appliqué à *intérêts simples* sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux i sur la période.

Le *taux équivalent* au taux i pour une sous-période est le taux qui, appliqué à *intérêts composés* sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux i sur la période.

La taux proportionnel au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

La taux équivalent au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1.$$

NB. Pour plus de détails, on se reportera au cours « Intérêts et annuités » disponible à

http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/index.html

Sauf mention du contraire, dans ces exercices, les intérêts sont composés et les annuités en fin de période.

— Exercices —

8) a) Calculer les intérêts produits par un capital de 5000 € placé à $4,5\%$ pendant 1 an et demi.

b) Calculer les intérêts produits par un capital de 10000 € placé à $4,72\%$ pendant 1 an, 4 mois et 15 jours. Pour répondre à cette question, on utilisera l'année *commerciale*, c'est-à-dire qu'on supposera l'année fictivement partagée en 12 mois de 30 jours.

9) Un particulier doit vendre sa maison dans 9 mois pour un montant de 160000 €. Il a besoin de l'argent maintenant et doit donc souscrire un prêt. Quelle somme, remboursable dans 9 mois par le produit de la vente peut-il emprunter aujourd'hui à intérêt simple au taux annuel de $9,65\%$.

10) On dit que l'intérêt simple d'un placement ou d'un emprunt est *post*compté s'il est versé en fin de placement et *pre*compté s'il est versé en début de placement. Sauf mention contraire, l'intérêt est postcompté.

a) Un particulier souscrit un emprunt de 10000 € pour 4 mois aux taux annuel de 10%. Calculer les intérêts simples précomptés et les intérêts simples postcomptés de cet emprunt.

b) Quel est le taux d'intérêt simple postcompté pour lequel un emprunt de 10000 € pour 4 mois est équivalent à un emprunt de 10000 € pour 4 mois au taux simple annuel précompté de 10%.

c) Quel type d'emprunt est le plus intéressant pour l'emprunteur ? pour le prêteur ?

11) a) Quelle est la valeur acquise au bout de 17 ans d'un capital de 400 € placé au taux annuel de $4,52\%$.

b) Combien doit-on placer aujourd'hui au taux annuel de $5,61\%$ pour disposer dans 9 ans de 47000 € ?

c) Quelle est la durée de placement de 8500 € au taux annuel de $6,5\%$, sachant que la valeur acquise est 12402,71 € ?

d) Le valeur acquise au bout de 13 ans d'un capital de 13000 € est 27000 €. Quel est le taux annuel de placement ?

12) On reprend la question 11.a. Si on avait placé à intérêt simple la même somme pendant la même durée, quel aurait dû être le taux d'intérêt pour produire le même intérêt ?

13) Quel taux d'intérêt permet en 10 ans de doubler un capital ?

14) Déterminer les taux mensuel, bimestriel et semestriel proportionnels et équivalents au taux annuel de $11,32\%$.

15) a) Une personne place chaque fin de quinzaine la somme de 75 € au taux annuel de $7,21\%$. Quelle est la valeur acquise au bout de 2 ans et demi ? au bout de 5 ans ?

b) Une suite de 27 annuités constantes capitalisées au taux de $5,6\%$ a une valeur acquise de 34000 €. Calculer le montant de l'annuité.

c) On veut constituer un capital de 25000 € à l'aide de versements de 7300 € effectués en fin d'année au taux annuel de $5,8\%$. Combien doit-on verser d'annuités ? Quel est le montant de la dernière annuité ?

d) Quinze annuités de 5000 € chacune ont une valeur acquise de 86000 €. Calculer le taux de capitalisation.

16) Calculer la valeur acquise d'une suite de 17 versements mensuels d'un montant de 250 € chacun au taux annuel de $4,7\%$: **a)** au moment du versement de la 17^{e} mensualité ; **b)** cinq mois après le versement de la première mensualité ; **c)** cinq mois après le versement de la 17^{e} mensualité.

17) Vous empruntez 10000 € au taux de $9,8\%$. Votre banquier vous propose de rembourser 2000 € à la fin de la première année, 4000 € à la fin de la deuxième année le solde à la fin de la troisième année.

a) Quel est le montant de ce solde ? le montant des intérêts ?

b) Quel aurait été le montant des annuités si vous aviez remboursé par trois annuités constantes ?

18) Une personne qui ne peut verser chaque mois que 500 € souhaite souscrire un emprunt remboursable en 120 mensualités au taux annuel de $7,3\%$. Quelle somme peut–elle emprunter ? (Faire le calcul en taux équivalent, en taux proportionnel.)

19) Vous avez gagné 800000 € ! Si vous placez la totalité de cette somme sur un compte rémunéré à $3,5\%$ annuel et que vous retirez chaque mois après paiement de l'intérêt et pendant 70 ans une somme fixe S de façon à vider le compte, quelle somme S pouvez–vous retirer ?

20) Un personne a versé mensuellement au taux annuel de $5,5\%$ les sommes suivantes : 200 €, 450 €, 340 €, 150 €, 210 €, 330 €, 400 €, 250 €, 300 €. Quelle est la valeur acquise juste après le neuvième versement ? à la fin du 4^{e} mois suivant le dernier versement ? S'il avait opté pour des mensualités constantes, quel aurait dû être le montant de ces mensualités pour obtenir la même valeur acquise au bout de neuf mois.