



Fiche d'exercices 6 : mathématiques financières (suite)

SAVOIR

Les emprunts *indivis* sont les emprunts faits auprès d'un seul prêteur. On va étudier le cas où le prêteur met à disposition de l'emprunteur un capital pour une durée fixée à l'avance, et où l'emprunteur rembourse ce capital selon un rythme convenu et verse des intérêts à échéances périodiques.

Lors de chaque annuité (remboursement), on fait la part entre

- La somme qui participe au *remboursement du capital emprunté* ;
- La somme qui participe au *remboursement de l'intérêt*.

La somme qui participe au remboursement du capital emprunté s'appelle l'*amortissement*. Si A_p est l'annuité de la période p , c'est-à-dire le montant payé à la fin de la période p , on a $A_p = I_p + M_p$ avec

- L'intérêt créé pendant la période p et remboursé en fin de cette période, noté I_p ;
- L'amortissement de la période p , noté M_p .

On se place dans le cadre d'un emprunt d'un capital D_0 au taux d'intérêt i par période pendant n périodes. On fixe les notations suivantes.

- Le capital restant dû en *début* de période p est noté D_{p-1} ;
- Le montant de l'annuité payée en *fin* de période p est noté A_p ;
- L'intérêt versé en *fin* de la période p est noté I_p ;
- L'amortissement versé en *fin* de la période p est noté M_p .

À chaque début de période p , on a une dette D_{p-1} , c'est la somme qui reste due et crée un intérêt $I_p = D_{p-1}i$ pendant la période. À la fin, de la période, on rembourse l'annuité A_p qui paye l'intérêt I_p et contribue au remboursement de la dette : $A_p = I_p + M_p$. La dette de début de période $p+1$ est alors $D_p = D_{p-1} - M_p$. On résume la situation par période dans un tableau, appelé *tableau d'amortissement*.

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	D_0	$I_1 = D_0i$	M_1	$A_1 = I_1 + M_1$
2	$D_1 = D_0 - M_1$	$I_2 = D_1i$	M_2	$A_2 = I_2 + M_2$
3	$D_2 = D_1 - M_2$	$I_3 = D_2i$	M_3	$A_3 = I_3 + M_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$D_{p-1} = D_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = D_{p-1}i$	M_p	$A_p = I_p + M_p$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - M_{n-1}$	$I_n = D_{n-1}i$	M_n	$A_n = I_n + M_n$

— EXERCICES —

1) Une famille peut consacrer 1600 € par mois au remboursement d'un prêt immobilier d'une durée de 240 mensualités au taux annuel 6,5%. Si l'organisme financier emploie pour le calcul des intérêts le taux mensuel proportionnel, quel montant maximum cette famille peut-elle emprunter ? Quel serait ce montant si l'on employait le taux mensuel équivalent ? Quel est dans chaque cas le coût de prêt ? Quelle conclusion en tirez-vous ?

2) On emprunte 200000 € au taux annuel 12%. Le remboursement se fait en 6 mensualités égales. Dresser le tableau d'amortissement de ce prêt pour des taux mensuels équivalents.

3) On considère un remboursement d'un emprunt en n versements de fin de période, de montant a et au taux par période i . Montrer que **a)** les amortissements forment une suite géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme $a(1 + i)^{-n}$; **b)** le capital restant dû après le p^e versement est

$$a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}.$$

4) Une personne a emprunté 10000 € au taux annuel 8,75%. Le capital restant dû au début de la sixième est année 8156,9 €. Quelle est la durée de l'emprunt ? Quelle est la valeur de l'annuité supposée constante ?

5) La onzième ligne d'un tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes est

Dettes due	Intérêt	Amortissement
51676,98 €	5803,22 €	1941,38 €

Quel est le taux d'intérêt ? Quelle est la durée de l'emprunt ?

6) Une personne a contracté le 1^{er} avril 2003 un emprunt remboursable par mensualités constantes à taux mensuel équivalent. Sachant que le 50^e amortissement sera 402,47 € et le 60^e sera 424,7 € et qu'en outre le capital restant dû aussitôt après le paiement de la 61^e mensualité sera 31155,27 €. Calculer : **a)** le taux mensuel et le taux annuel; **b)** le montant de la mensualité; **c)** le nombre de mensualités. **d)** Quel le montant du capital remboursé à la 80^e mensualité ?

7) Une entreprise emprunte un capital remboursable par annuités constantes aux taux d'intérêts annuels suivants : 5% pendant les cinq premières années, 6% pendant les six années suivantes et 7% pendant les sept dernières années. Elle rembourse chaque année 50 000 €. **a)** Calculer le montant de l'emprunt. **b)** Quel est le coût de l'emprunt ? **c)** À la date anniversaire de la dixième année de l'emprunt et après paiement de la dixième annuité, l'entreprise décide de rembourser le solde de l'emprunt. Quel est le montant du remboursement anticipé ? Quel est alors le coût de l'emprunt ?

8) Le 11 mars 1993, une personne emprunte 152000 € sur 20 ans au taux d'intérêt annuel 10,5%. Le remboursement s'effectue par mensualités constantes, les intérêts étant calculés en taux mensuels proportionnels. Le 11 mars 2003, après avoir versé sa mensualité, cette personne a la possibilité de renégocier son prêt pour une durée de 10 ans au taux annuel de 6,8% aux conditions de remboursement identiques et après paiement de pénalités de 3% sur le capital restant dû. Conseillez-vous à cette personne de renégocier son prêt ? Quelle est l'économie réalisée ?

9)

Le crédit renouvelable (ou crédit *revolving*) est un produit bancaire de plus en plus proposé aux particuliers. Il s'agit de prêts que l'emprunteur peut utiliser librement sans affectation précise ou de prêts associés à des cartes et consentis pour des achats chez des commerçants affiliés (par exemple cartes Cofinoga, Pass de Carrefour, FNAC mais aussi abonnements dans les salles de gymnastique). Dans ce type de prêt, le montant prêté est plafonné : l'organisme de prêt détermine le montant maximal (appelé encore plafond) du prêt en fonction de la capacité de remboursement du client et de la durée souhaitée. Tant que le plafond n'est pas atteint l'emprunteur peut solliciter un nouveau prêt dont le plafond sera calculé en tenant compte des versements en cours dans les prêts déjà consentis. Quand le plafond est atteint l'emprunteur ne peut plus solliciter de prêt sans quoi il dépasse sa capacité de remboursement ; dans ce cas il doit attendre que les remboursements des prêts en cours permettent de revenir sous le plafond. Un particulier peut consacrer 250 € par mois à des remboursements de prêts. Il sollicite un crédit renouvelable de 12 mois au taux annuel de 10,2%. **a)** Sachant que l'organisme de crédit utilise un taux mensuel proportionnel pour le calcul des intérêts, calculer le plafond de ce crédit. **b)** Cette personne emprunte 1500 € pour 12 mois. Quelle est le montant d'une mensualité de remboursement ? **c)** Après la septième mensualité, quelle somme peut-il emprunter sur deux ans ?

10) Une entreprise emprunte pour 5 ans le capital de 1,5 millions d'euros au taux annuel 7,5%, le remboursement se faisant *in fine*, c'est-à-dire en une seule fois au terme de la période de prêt, les autres années l'entreprise se contente de verser les intérêts. **a)** Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt. **b)** Pour préparer le remboursement du capital l'entreprise place chaque année à 5% et à intérêts composés une certaine somme. Combien doit-elle placer chaque année ?