

Université Paul Valéry



Emprunts indivis

Administration Économique et Sociale

Mathématiques

XA100M

Les emprunts **indivis** sont les emprunts faits auprès **d'un seul prêteur**.

On va étudier le cas où le prêteur met à disposition de l'emprunteur un capital pour une durée fixée à l'avance, et où l'emprunteur rembourse ce capital selon un rythme convenu et verse des intérêts à échéances périodiques.

1 Le cas général

Lors de chaque annuité (remboursement), on fait la part entre

- La somme qui participe au **remboursement du capital emprunté** ;
- La somme qui participe au **remboursement de l'intérêt**.

La somme qui participe au remboursement du capital emprunté s'appelle l'**amortissement**.

Si A_p est l'annuité de la période p , c'est-à-dire le montant payé **à la fin** de la période p , on a

$$\text{👉} \quad A_p = I_p + M_p$$

avec

- L'intérêt crée pendant la période p et remboursé en fin de cette période, noté I_p ;
- L'amortissement de la période p , noté M_p .

Situation

Emprunt d'un capital D_0 au taux d'intérêt i par période pendant n périodes.

Notations

- Le capital restant dû en **début** de période p est noté D_{p-1} ;
- Le montant de l'annuité payée en **fin** de période p est noté A_p ;
- L'intérêt versé en **fin** de la période p est noté I_p ;
- L'amortissement versé en **fin** de la période p est noté M_p .

Principe

☞ À chaque début de période p , on a une dette D_{p-1} , c'est la somme qui reste due et crée un intérêt $I_p = D_{p-1}i$ pendant la période. À la fin, de la période, on rembourse l'annuité A_p qui paye l'intérêt I_p et contribue au remboursement de la dette : $A_p = I_p + M_p$. La dette de début de période $p + 1$ est alors $D_p = D_{p-1} - M_p$.

◀◀ C'est le même principe que la méthode de calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités certaines temporaires (chapitre *Annuités*, §3.1) avec $A_0 = 0$ et où la dette était notée V au lieu de D .

On résume la situation par période dans un tableau, appelé

tableau d'amortissement.

Tableau d'amortissement

Pé-riode	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	D_0	$I_1 = D_0 i$	M_1	$A_1 = I_1 + M_1$
2	$D_1 = D_0 - M_1$	$I_2 = D_1 i$	M_2	$A_2 = I_2 + M_2$
3	$D_2 = D_1 - M_2$	$I_3 = D_2 i$	M_3	$A_3 = I_3 + M_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$D_{p-1} = D_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = D_{p-1} i$	M_p	$A_p = I_p + M_p$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - M_{n-1}$	$I_n = D_{n-1} i$	M_n	$A_n = I_n + M_n$

La dette en fin de n^{e} période (donc en début de $n + 1^{\text{e}}$) doit être totalement payée donc

$$\text{👉} \quad D_n = D_{n-1} - M_n = 0.$$

Coût de l'emprunt

La somme remboursée au total est la somme de toutes les annuités versées, c'est-à-dire $A_1 + A_2 + \dots + A_n$,

la somme empruntée au début est D_0

le coût de l'emprunt est donc

$$\text{👉 } A_1 + A_2 + \dots + A_n - D_0.$$

Somme restant à payer

La somme qui reste à payer au début de la période $p + 1$ est la valeur actuelle des $n - p$ annuités restantes (c'est la somme qui va être remboursée par les $n - p$ annuités restantes, intérêt compris).

◀◀ D'après le chapitre *Annuités*, §3.1, on a donc

$$\text{👉} \quad D_p = \sum_{k=p+1}^n A_k (1+i)^{p-k}$$

Pour chaque valeur de k comprise entre $p + 1$ et n , on calcule $A_k (1+i)^{p-k}$ puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

Somme empruntée

En particulier, la somme due en début de première période, D_0 , est la somme empruntée.

Lors d'un emprunt sur n périodes, au taux i par périodes, en remboursant A_k à la période k ($k = 1, 2, \dots, n$), on peut emprunter

$$\text{👉} \quad D_0 = \sum_{k=1}^n A_k (1+i)^{-k}$$

Pour chaque valeur de k comprise entre 1 et n , on calcule $A_k(1+i)^{-k}$ puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

Amortissement

On peut relier l'amortissement d'une période à l'amortissement de la période précédente.

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

En effet, $A_{p+1} = M_{p+1} + I_{p+1}$ donc $M_{p+1} = A_{p+1} - I_{p+1}$.

Puis,

$$I_{p+1} = D_p i \quad \text{donc} \quad M_{p+1} = A_{p+1} - D_p i.$$

Puis

$$D_p = D_{p-1} - M_p$$

donc

$$M_{p+1} = A_{p+1} - D_{p-1} i + M_p i. \quad (1)$$

Or,

$$D_{p-1} i = I_p \quad \text{et} \quad A_p = M_p + I_p$$

donc

$$D_{p-1} i = A_p - M_p. \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1), on obtient

$$M_{p+1} = A_{p+1} - A_p + M_p + M_p i = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

2 Le cas particulier des annuités constantes

2.1 Somme emprunable

Dans le cas général, on a vu que

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

Ici,

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_0 = a \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right].$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $(1 + i)^{-1}$ et de raison $(1 + i)^{-1}$, donc

$$D_0 = a(1 + i)^{-1} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-1}} = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, on peut emprunter

$$\text{☞} \quad D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

☞☞ Voir le chapitre *Annuités*, §3.2.2.

2.2 Valeur de l'annuité

Lorsqu'on veut acheter un bien, on connaît la valeur de ce bien, c'est cette somme D_0 qu'on veut emprunter. Quelles annuités doit-on payer pour rembourser cet emprunt lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période à annuités constantes ?

On a vu que

$$D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

donc

$$\text{☞} \quad a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$



Les expressions

$$D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

et

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

ne sont que deux expressions différentes d'une même formule.

N'en retenez qu'une et retrouvez l'autre immédiatement.

2.3 Dette en début de période

Dans le cas général, on a vu que

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

Ici,

$$A_{p+1} = A_{p+2} = \dots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_p = a \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-p-1)} + (1+i)^{-(n-p)} \right].$$

On reconnaît la somme des $n - p$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$, donc

$$D_p = a(1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-(n-p)}}{1 - (1+i)^{-1}} = a \frac{1 - (1+i)^{p-n}}{i}.$$

Lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, la dette en début de $p + 1^{\text{e}}$ période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de p^{e} période) est

$$\text{👉} \quad D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}.$$

2.4 Lien entre somme empruntée et dette

Il n'est pas nécessaire de connaître l'annuité pour calculer la dette en début de $p + 1^{\text{e}}$ période à partir de la somme empruntée. En effet, on a

$$D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}$$

et

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donc

$$\begin{aligned} D_p &= D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i} \\ &= D_0 \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{1 - (1 + i)^{-n}} \end{aligned}$$

puis, en multipliant numérateur et dénominateur par $(1 + i)^n$, on obtient

$$D_p = D_0 \frac{(1 + i)^n - (1 + i)^p}{(1 + i)^n - 1}.$$

Lors d'un emprunt de D_0 , pendant n périodes, au taux i par période, la dette en début de $p + 1^{\text{e}}$ période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de p^{e} période) est

$$\text{☞} \quad D_p = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$

2.5 Amortissement

Dans le cas général, on a vu la relation

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

Ici, $A_{p+1} = A_p$ donc

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p.$$



Dans un emprunt par annuités constantes, les amortissements sont en suite géométrique de raison

$$1 + i.$$

Le premier amortissement est

$$M_1 = A_1 - I_1 = a - D_0 i.$$

Or,

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donc

$$M_1 = D_0 i \frac{(1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-n}} = D_0 \frac{i}{(1 + i)^n - 1}.$$

Puisque $M_p = (1 + i)M_{p-1}$, on a $M_p = (1 + i)^{p-1}M_1$ et donc

$$M_p = D_0 \frac{i(1 + i)^{p-1}}{(1 + i)^n - 1}.$$

3 Un exemple

On emprunte un capital de 76000 € au taux d'intérêt annuel 10% pour 5 ans. Les remboursements se font à la fin de chaque année par annuités constantes. Le montant de chaque annuité est

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = 76000 \times \frac{0,1}{1 - \frac{1}{1,1^5}} = 20048,61 \text{ €}.$$

Le capital dû en début de 1^{re} année est donc $D_0 = 76000 \text{ €}$. Pendant la première année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_1 = D_0 i = 76000 \times 0,1 = 7600.$$

L'annuité est $A_1 = 20048,61 \text{ €}$, de sorte que l'amortissement en euros de cette première année est

$$M_1 = A_1 - I_1 = 20048,61 - 7600 = 12448,61.$$

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000€	7600€	12448,61€	20048,61€
2				
3				
4				
5				

Le capital dû en début de 1^{re} année est $D_0=76000$ €.

L'amortissement de cette première année est $M_1 =12448,61$ € donc le capital dû en début de 2^e année est, en euros,

$$D_1 = D_0 - M_1 = 76000 - 12448,61 = 63551,39.$$

Pendant la deuxième année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_2 = D_1 i = 63551,39 \times 0,1 = 6355,14.$$

L'annuité est $A_2 =20048,61$ €, de sorte que l'amortissement en euros de cette deuxième année est

$$M_2 = A_2 - I_2 = 20048,61 - 6355,14 = 13693,47.$$

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000€	7600€	12448,61€	20048,61€
2	63551,39€	6355,14€	13693,47€	20048,61€
3				
4				
5				

En répétant ce qu'on a fait pour la deuxième année, on construit pas-à-pas le tableau

Pé-riode	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448, 61 €	20048, 61 €
2	63551, 39 €	6355, 14 €	13693, 47 €	20048, 61 €
3	49857, 92 €	4985, 80 €	15062, 82 €	20048, 61 €
4	34795, 10 €	3479, 51 €	16569, 10 €	20048, 61 €
5	18226 €	1822, 6 €	18226 €	20048, 61 €

Méthode rapide

Le montant de chaque annuité est obtenu par

$$A_p = a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

En utilisant la formule

$$D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}$$

on remplit rapidement la colonne *capital dû*. En utilisant

$$I_p = D_{p-1}i,$$

on remplit alors rapidement la colonne *intérêt*. Enfin, en utilisant

$$M_p = A_p - I_p,$$

on remplit rapidement la colonne *amortissement*.

Tout cela est facilement programmable avec un logiciel tableur.

Un autre exemple, de calcul de prêt immobilier, est disponible sur

<http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/>