Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

Intérêts

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques

XA100M

1 La notion d'intérêt

1.1 Définition

Définition 1. *L'**intérêt** est la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (le prêteur) à un autre agent économique.*

Lorsqu'une personne (physique ou morale) emprunte de l'argent à une autre, elle achète cet emprunt. L'intérêt est le coût de cet emprunt.

La somme empruntée s'appelle le **capital**. La somme qui doit être remboursée est donc

la somme du capital et de l'intérêt.

1.2 Exemples

Exemple 1. Vous empruntez de l'argent à la banque. Vous est l'emprunteur, le banquier est le prêteur. Votre emprunt vous coûte.

Exemple 2. Vous placez de l'argent sur un compte bancaire. Vous est le prêteur, la banque est l'emprunteur. Votre placement vous rapporte (et coûte à la banque).

1.3 Taux d'intérêt

Définition 2. *Le **taux d'intérêt** par période est l'intérêt rapporté par une unité monétaire pendant une période.*

Le taux d'intérêt par période est le nombre i par lequel il faut multiplier le capital C pour obtenir l'intérêt I produit par C pendant la période :

$$I = C \times i.$$

L'emprunteur aura donc a rembourser

$$C + I = C + C \times i$$

et la somme à rembourser après une période est donc

$$(1 + i) \times C.$$

Exemple 3. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour un an au taux annuel de $5,6\%$. On rappelle

$$5,6\% = \frac{5,6}{100} = 0,056.$$

On a $C = 800$ et $i = 0,056$. L'intérêt en euros produit par 800 € à $5,6\%$ annuel pendant un an est

$$800 \times 0,056 = 44,48.$$

La somme en euros que vous devrez rembourser après un an est donc

$$800 \times (1 + 0,056) = 844,48.$$

Votre emprunt vous aura coûté 44,48 €.

Exemple 4. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour **deux** ans au taux annuel de $5,6\%$. Comment calculer l'intérêt ?

1re méthode : on a vu dans l'exemple 3 que l'intérêt dû après un an est de 44,48 €. L'intérêt produit par les 800 € pendant la deuxième année est encore de 44,48 € donc, à la fin de la deuxième année, vous remboursez 800 €+44,48 €+44,48 €=888,96 €. Au total, votre emprunt vous a coûté

$$88{,}96\,€.$$

$\longrightarrow$ notion d'intérêt simple

Exemple 4. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour **deux** ans au taux annuel de $5,6\%$. Comment calculer l'intérêt ?

2^e^ méthode : on a vu dans l'exemple 3 que l'intérêt dû après un an est de 44,48 €. Vous ne payez **pas** ces 44,48 € et tout se passe comme si, à la fin de la première année et il vous restait à rembourser 844,48 €. L'intérêt produit par ces 844,48 € pendant la seconde année est (en euros)

$$844,48 \times 0,056 = 47,29$$

et à la fin de la seconde année, vous devez rembourser (en euros)

$$844,48 + 47,29 = 891,77.$$

Votre emprunt était de 800 €, vous remboursez 891,77 € donc cet emprunt vous a coûté

91,77 €.

⟶ notion d'intérêt composé

2 Intérêts simples

2.1 Définition

Définition 3. *Un capital est placé à* ***intérêts simples*** *si c'est le* ***capital de départ*** *qui produit l'intérêt pendant toute la durée du placement.*

2.2 Calcul des intérêts simples

On emprunte un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période.

L'intérêt à payer après la première période est $C_0 \times i$ et, puisque c'est le capital de départ C_0 qui produit l'intérêt, l'intérêt à payer après chaque période est $C_0 \times i$.

L'**intérêt total** à payer (le coût de l'emprunt) est donc

$$I_n = \underbrace{C_0 \times i + \cdots + C_0 \times i}_{n \text{ fois}}$$

c'est-à-dire

$$I_n = C_0 \times n \times i.$$

La **somme totale à rembourser** est $C_n = C_0 + I_n$ donc

$$C_n = (1 + n \times i) \times C_0.$$

2.3 Intérêts simples précomptés, intérêts simples postcomptés

Lors d’un emprunt à intérêts simples, l’intérêt peut être remboursé en début ou en fin d’emprunt.

Lorsque l’intérêt est payé en **fin** d’emprunt, l’intérêt est dit **postcompté** : l’emprunteur dispose de C_0 en début d’emprunt et rembourse $(1+n\times i)\times C_0$ en fin d’emprunt.

Lorsque l’intérêt est payé en **début** d’emprunt, l’intérêt est dit **précompté** : l’emprunteur emprunte C_0 en début d’emprunt mais reçoit

$$C_0 - I_n = (1 - i\times n)\times C_0$$

et rembourse C_0 en fin d’emprunt.

Sauf indication contraire, les intérêts simples sont postcomptés.

3 Intérêts composés

3.1 Définition

Définition 4. *Un capital est placé à* ***intérêts composés*** *si, à la fin de chaque période, l'intérêt gagné est incorporé au capital pour produire lui aussi un intérêt.*

Sauf si on précise qu'il est à intérêts simples, un placement ou un emprunt sera toujours considéré comme étant à intérêts composés.

3.2 Calcul de la valeur acquise

On place un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période.

Fin de la première période : l'intérêt produit est $C_0 \times i$, le capital est $C_1 = C_0 \times (1+i)$.

Fin de la deuxième période : l'intérêt produit est $C_1 \times i = C_0 \times (1+i) \times i$, le capital est $C_2 = C_1 \times (1+i) = C_0 \times (1+i)^2$.

D'une période à l'autre, la capital est multiplié par $(1+i)$. Le suite C_n est donc une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1+i$ de sorte que :

le capital à la fin des n périodes est

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Ce capital s'appelle la **valeur acquise**. Dans le cas où vous avez placé de l'argent, c'est la somme qu'on vous remet à la fin du placement ; dans le cas où vous avez emprunté de l'argent, c'est la somme que vous devez rembourser.

3.3 Calcul de l'intérêt

Lors du placement d'un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période, la valeur acquise est

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Puisque le capital de départ était C_0, l'**intérêt total** à payer (le coût de l'emprunt) est

$$I_n = C_n - C_0 = \left[(1+i)^n - 1\right] \times C_0.$$

3.4 Calcul de la valeur actuelle

On a déjà calculé la valeur acquise C_n par le placement d'un capital C_0 au taux i par période pendant n périodes.

On peut inversement calculer le capital qu'il faut placer au taux i par période pendant n périodes pour obtenir un capital C. Ce capital C_0 qu'il faut placer s'appelle la **valeur actuelle**.

Puisque C sera la valeur acquise par placement de la valeur actuelle C_0, on a

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

et donc, la valeur actuelle d'un capital C placé au taux i par période pendant n périodes est

$$C_0 = \frac{C}{(1+i)^n}.$$

4 Taux proportionnels et taux équivalents

Lorsque le taux d'intérêt est donné pour une période, mais que l'on emprunte pour une sous-période de cette période, il faut savoir calculer l'intérêt dû.

Exemple 5. Pour un placement d'un an au taux annuel de $5,7\%$, quel taux mensuel produit le même intérêt sur un an ? Ici, la période est l'année et la sous-période est le mois. Il y a douze sous-périodes.

Là encore, il faut distinguer intérêts simples et composés.

4.1 Définitions

Définition 5. *Le **taux proportionnel** au taux i pour une sous-période est le taux qui, appliqué à **intérêts simples** sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux i sur la période.*

Définition 6. *Le **taux équivalent** au taux i pour une sous-période est le taux qui, appliqué à **intérêts composés** sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux i sur la période.*

4.2 Calcul du taux proportionnel

On divise la périodes en k sous-périodes et on veut calculer le taux proportionnel au taux i pour une sous-période. On note i_k ce taux proportionnel.

En plaçant le capital C_0 à intérêts simples au taux i_k pendant k sous-périodes, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + k \times i_k)$$

(voir §2.2).

En plaçant la capital C_0 pendant une période au taux i, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i)$$

(voir §1.3).

Par définition du taux proportionnel, il doit y avoir égalité de ces deux valeurs acquises donc

$$C_0 \times (1 + k \times i_k) = C_0 \times (1 + i).$$

Puisque

$$C_0 \times (1 + k \times i_k) = C_0 \times (1 + i)$$

on déduit

$$1 + k \times i_k = 1 + i$$

d'où

$$k \times i_k = i$$

et enfin

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

La taux proportionnel au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

4.3 Calcul du taux équivalent

On divise la périodes en k sous-périodes et on veut calculer le taux équivalent au taux i pour une sous-période. On note i_k ce taux équivalent.

En plaçant le capital C_0 à intérêts composés au taux i_k pendant k sous-périodes, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i_k)^k$$

(voir §3.2).

En plaçant la capital C_0 pendant une période au taux i, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i)$$

(voir §1.3).

Par définition du taux équivalent, il doit y avoir égalité de ces deux valeurs acquises donc

$$C_0 \times (1 + i_k)^k = C_0 \times (1 + i).$$

Puisque

$$C_0 \times (1+i_k)^k = C_0 \times (1+i)$$

on déduit

$$(1+i_k)^k = 1+i$$

d'où

$$1+i_k = (1+i)^{1/k}$$

et enfin

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1.$$

La taux équivalent au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1.$$

Remarque. On a toujours

$$(1+i)^{1/k} < 1 + \frac{i}{k}$$

de sorte que le taux équivalent est toujours inférieur au taux proportionnel (toute chose égale par ailleurs).

Exemple 6. On place au taux annuel $5,07\%$. On calcule le taux proportionnel mensuel. On a $i = 0,0507$. La période est l'année, la sous-période est le mois donc $k = 12$. Le taux proportionnel mensuel est donc

$$i_{12} = \frac{0,0507}{12} = 0,004225 = 0,4225\%.$$

Si on place 273 € pendant sept mois à intérêts simples au taux annuel $5,07\%$, la somme (en euros) à rembourser est donc

$$C_7 = 273 \times (1 + 0,004225 \times 7) = 281,07.$$

Exemple 7. On place au taux annuel $5,07\%$. On calcule le taux équivalent mensuel. On a $i = 0,0507$. La période est l'année, la sous-période est le mois donc $k = 12$. Le taux équivalent mensuel est donc

$$i_{12} = (1+0,0507)^{1/12} - 1 = 0,004130 = 0,4130\%.$$

Si on place 273 € pendant sept mois à intérêts composés au taux annuel $5,07\%$, la somme (en euros) à rembourser est donc

$$C_7 = 273 \times (1+0,004130)^7 = 281,00.$$