Université Paul Valéry

Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

Suites

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques

XA100M

1 Introduction : qu’est-ce qu’une suite ?

On appelle suite de nombres un paquet de nombres donné dans un certain ordre et que l’on peut énumérer.

C’est donc un paquet de nombres donnés les uns à la suite des autres.

Par exemple,

$$1 \ \ 4 \ \ -2 \ \ 6 \ \ 7$$

est une suite de (cinq) nombres et

$$4 \ \ 1 \ \ -2 \ \ 7 \ \ 6$$

est une **autre** suite de (cinq) nombres.

Une suite de nombres n’est pas nécessairement finie :

$$1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ \textit{etc.}$$

est une suite infinie de nombres. Il nous faut trouver une méthode pour rendre le terme « *etc.* » non ambigü.

Chaque nombre d’une suite s’appelle un **terme** de cette suite.

On donne **trois** façons de décrire une suite.

1re méthode : on cite tous les termes de la suite dans l'ordre. Par exemple, $1 \;\; 4 \;\; -2 \;\; 6 \;\; 7$. Cela n'est possible que lorsque la suite a un nombre fini de termes.

2^{e} méthode : on donne une recette de calcul de chaque terme. Par exemple, on construit une suite w en disant que, pour chaque entier $n \geq 1$, le terme d'indice n de la suite vaut $4,5 \times n$. Le premier terme est $w_1 = 4,5$, le deuxième terme est $w_2 = 4,5 \times 2 = 9$, le dix-millième terme est

$$w_{10000} = 4,5 \times 10000 = 45000.$$

De même, avec cette méthode, la suite de tous les entiers naturels peut-être décrite sans ambigüité, plutôt que de dire : on décrit la suite u par

$$0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; \textit{etc.}$$

on dira : on décrit la suite u par $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 0$.

3ᵉ méthode : on donne le premier terme de la suite puis une recette de calcul de chaque terme en fonction des termes précédents. Par exemple, on construit une suite v en disant

– $v_1 = 1$: le terme d'indice 1 de la suite v est 1 ;
– pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + 3$: on construit chaque terme en ajoutant 3 au précédent.

Le premier terme de cette suite est $v_1 = 1$, le deuxième est $v_2 = v_1 + 3 = 1 + 3 = 4$, le troisième est $v_3 = v_2 + 3 = 4 + 3 = 7$ *etc.* Avec cette méthode, si on voulait calculer le dix-millième terme, il faudrait déjà calculer les neuf mille neuf cent quatrevingt-dix-neuf premiers termes.

Rien n'oblige à compter les termes d'une suite à partir de 1. En décrivant la suite des entiers naturels par $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 0$, on a commencé à compter les termes de la suite u par 0 : le premier terme est $u_0 = 0$, le deuxième terme est $u_1 = 1$, le vingt-septième terme est $u_{26} = 26$.

On peut en fait compter les termes d'une suite en partant de n'importe quel nombre entier.

Par exemple, on définit une suite t en posant :

- $t_{-4} = 2$: le premier terme est le terme d'indice -4 et il vaut 2 ;
- pour tout entier $n \geq -4$, $t_{n+1} = t_n \times t_n$: on construit chaque terme en multipliant le terme précédent de cette suite par lui même.

Le deuxième terme de la suite t est le terme d'indice -3 qui vaut

$$t_{-3} = t_{-4} \times t_{-4} = 2 \times 2 = 4.$$

Le troisième terme de la suite t est le terme d'indice -2 qui vaut

$$t_{-2} = t_{-3} \times t_{-3} = 4 \times 4 = 16$$

etc.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 1. *Une suite est dite* ***arithmétique de raison*** r *si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent auquel on a ajouté* r.

Par exemple, la suite v définie par

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$

est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_1 = 1$.

Soit n_0 un nombre entier et r un nombre réel, la suite arithmétique de **premier terme** u_{n_0} et de **raison** r est donc la suite définie par la donnée de u_{n_0} et la règle

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

Par exemple dans la suite v définie juste avant, on avait $n_0 = 1$ et $r = 3$.

La suite arithmétique de premier terme $u_{-12} = 0$ et de raison $-4,2$ est définie par

$$\begin{cases} u_{-12} = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 4,2 \quad \text{pour tout entier } n \geq -12. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $n_0 = -12$, $r = -4,2$ et $u_{n_0} = u_{-12} = 0$.

2.2 Calcul des termes d'une suite arithmétique

On considère une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r.
On veut calculer le terme d'indice n.

Le premier terme est donc u_{n_0}.

Le deuxième terme est $u_{n_0+1} = u_{n_0} + r$.

Le troisième terme est $u_{n_0+2} = u_{n_0+1} + r = u_{n_0} + r + r = u_{n_0} + 2r$.

En réitérant, on obtient que si $k \geq 0$, le $k+1^{\text{e}}$ terme est $u_{n_0+k} = u_{n_0} + k \times r$.

En remplaçant $n_0 + k$ par n (ce qui est la même chose que remplacer k par $n - n_0$, on obtient que le terme d'indice n est

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times r.$$

On considère une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r.

On peut calculer le terme d'indice n pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ grâce à la formule

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times r.$$

Par exemple, si v est la suite définie par

$$\begin{cases} \quad v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

Que vaut v_{1234} ?

Le premier terme est $v_1 = 2$. On a donc $n_0 = 1$ et $v_{n_0} = 2$. La raison est $r = 3$. Le terme d'indice $n = 1234$ est alors donné par

$$v_{1234} = 2 + (1234 - 1) \times 3 = 3701.$$

2.3 Calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique

On a vu comment calculer les termes d'une suite arithmétique. On voudrait maintenant pouvoir la somme des premiers termes.

Par exemple, si w_n est la suite définie par

$$\begin{cases} w_{12} = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \quad \text{pour tout entier } n \geq 12. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$\begin{aligned} w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{15} &= 1 + (1+2) + (1+2\times 2) + (1+2\times 3) \\ &= 4\times 1 + 2\times(1+2+3) \\ &= 4 + 2\times 6 \\ &= 16. \end{aligned}$$

2.3.1 Exemple fondamental

On considère la suite de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1,

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

D'après le §2.2, on a $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 1$. Si $N \geq 1$ est un entier, la somme des N premiers termes est donc

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = 1 + 2 + \cdots + N.$$

On calcule cette somme grâce à la formule

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N \times (N+1)}{2}.$$

Par exemple

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55.$$

2.3.2 Preuve de l'exemple fondamental

On veut montrer que la somme des N premiers entiers supérieurs à 1 est

$$1+2+\cdots+N = \frac{N\times(N+1)}{2}.$$

Si $N=1$, cette formule est vraie puisque $\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$. Supposons qu'elle est vraie pour un entier N et montrons la alors pour l'entier suivant. On a

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(N+1) &= (1+2+\cdots+N)+(N+1)\\ &= \frac{N\times(N+1)}{2}+(N+1)\\ &= \frac{(N+1)\times(N+2)}{2}.\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $N+1$.

La formule est vraie pour le premier entier, puis si elle est vraie pour un entier, elle l'est pour l'entier suivant. Elle est donc vraie pour tous les entiers.

2.3.3 Cas général

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r la somme des N premiers termes de cette suite est

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = N \times u_{n_0} + \frac{r}{2} \times (N-1) \times N.$$

Considérons

$$\begin{cases} w_{12} = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \quad \text{pour tout entier } n \geq 12. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{15} = 4 \times v_{12} + \frac{2}{2} \times (4-1) \times 4 = 16.$$

Considérons

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n - 6 \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

La somme des 9 premiers termes est

$$9 \times 4 + \frac{-6}{2} \times (9-1) \times 9 = 36 - 216 = -280.$$

La somme des 10000 premiers termes est

$$10000 \times 4 + \frac{-6}{2} \times (10000-1) \times 10000 = -299930000.$$

2.3.4 Preuve du cas général

D'après le §2.2, on calcule

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = u_{n_0}+(u_{n_0}+r)+(u_{n_0}+2\times r)+\cdots+\left(u_{n_0}+(N-1)\times r\right)$$

Le terme u_{n_0} apparaît N fois donc

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r+2\times r+\cdots+(N-1)\times r.$$

On factorise alors par r pour avoir

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r\times(1+2+\cdots+(N-1)).$$

Enfin, en utilisant l'exemple fondamental

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r\times\frac{(N-1)\times N}{2}.$$

3 Les suites géométriques

3.1 Définition

Définition 2. *Une suite est dite* ***géométrique de raison*** *q si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent multiplié par q.*

Par exemple, la suite t définie par

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times t_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0 \end{cases}$$

est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = 1$.

Soit n_0 un nombre entier et q un nombre réel, la suite géométrique de **premier terme** u_{n_0} et de **raison** q est donc la suite définie par la donnée de u_{n_0} et la règle

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

Par exemple dans la suite t définie juste avant, on avait $n_0 = 0$ et $q = \frac{1}{2}$.

La suite géométrique de premier terme $u_{-1} = 3$ et de raison 2 est définie par

$$\begin{cases} u_{-1} = 3 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq -1. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $n_0 = -1$, $q = 2$ et $u_{n_0} = u_{-1} = 3$. Les premiers termes sont

$$u_{-1} = 3, \quad u_0 = 6, \quad u_1 = 12, \quad u_2 = 24, \quad u_3 = 48, \ldots$$

3.2 Calcul des termes d'une suite géométrique

On considère une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q. On veut calculer le terme d'indice n.

Le premier terme est donc u_{n_0}.

Le deuxième terme est $u_{n_0+1} = q \times u_{n_0}$.

Le troisième terme est $u_{n_0+2} = q \times u_{n_0+1} = q \times q \times u_{n_0} = q^2 \times u_{n_0}$.

En réitérant, on obtient que si $k \geq 0$, le $k+1^{\text{e}}$ terme est $u_{n_0+k} = q^k \times u_{n_0}$.

En remplaçant $n_0 + k$ par n (ce qui est la même chose que remplacer k par $n - n_0$), on obtient que le terme d'indice n est

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

On considère une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q.

On peut calculer le terme d'indice n pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ grâce à la formule

$$u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}.$$

La suite géométrique de premier terme $w_{-2} = 1$ et de raison 10 vérifie

$$\begin{aligned} w_{10} &= 10^{10-(-2)} \times 1 \\ &= 10^{12} \\ &= 1\underbrace{000000000000}_{12 \text{ zéros}}. \end{aligned}$$

La suite géométrique de premier terme $h_4 = 3,2$ et de raison $1,13$ vérifie

$$\begin{aligned} h_{12} &= 1,13^{12-4} \times 3,2 \\ &= 1,13^{8} \times 3,2 \\ &= 8,50702141730058272. \end{aligned}$$

3.3 Calcul de la somme des termes d'une suite géométrique

3.3.1 Exemple fondamental

On considère la suite de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q où q est un nombre réel **différent de** 1,

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

D'après le §3.2, on a $u_n = q^n$ pour tout entier $n \geq 0$. Si $N \geq 1$ est un entier, la somme des N premiers termes est donc

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} = 1 + q + \cdots + q^{N-1}.$$

On calcule cette somme grâce à la formule

$$1 + q + \cdots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

Par exemple,

$$1+2+2^2+2^3=\frac{2^4-1}{2-1}=\frac{16-1}{1}=15\,;$$

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5-1}{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{\frac{1}{32}-1}{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{31}{32}\times 2 \\
&= \frac{31}{16}.
\end{aligned}
$$

3.3.2 Preuve de l'exemple fondamental

Si $q \neq 1$, on veut montrer que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

C'est équivalent à

$$(q-1) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) = q^N - 1.$$

Or

$$\begin{aligned}(q-1) &\times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) \\ &= q \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}).\end{aligned}$$

Puis

$$q \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N$$

et en retirant $1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}$ à $q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N$, il reste $q^N - 1$ ce qui donne le résultat recherché.

3.3.3 Cas général

Si u est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q avec q un nombre réel différent de 1, la somme des N premiers termes de cette suite est

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Considérons

$$\begin{cases} f_0 = 2 \\ f_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times f_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 2 \times \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 1}{\dfrac{1}{2} - 1} = 4 \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{4}.$$

Considérons

$$\begin{cases} u_7 = 5 \\ u_{n+1} = 10 \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 7. \end{cases}$$

La somme des 6 premiers termes est

$$u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = 5 \times \frac{10^6 - 1}{10 - 1} = 5 \times \frac{999999}{9} = 555555.$$

3.3.4 Preuve du cas général

D'après le §3.2, on calcule

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} + q \times u_{n_0} + q^2 \times u_{n_0} + \cdots + q^{N-1} \times u_{n_0}$$

On factorise par u_{n_0} pour obtenir

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1})$$

et l'exemple fondamental implique

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$