Document disponible à http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA101M/index.html.

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

XA101M – méthodologie
Année 2003–2004

Fiche d'exercices 2 : équations et inéquations

SAVOIR

Principes généraux

Résolution des équations algébriques . — Les équations algébriques sont les équations de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux polynômes ou quotients de polynômes. Un *polynôme* est une fonction de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ où $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des nombres réels et $a_n \neq 0$. L'entier naturel n s'appelle le *degré du polynôme*. Pour résoudre une équation algébrique, on suivra la méthode suivante :

1. déterminer *l'ensemble de définition* $\mathscr{D}$ de l'équation, c'est–à–dire l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'équation a un sens. On utilisera souvent le fait qu'un quotient est défini pour toutes les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur ;
2. écrire l'équation sous la forme $f(x) - g(x) = 0$;
3. écrire l'équation sous la forme $P(x) = 0$ où P est un polynôme : si nécessaire, on procédera par réduction au même dénominateur ;
4. factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 et 2, les polynômes obtenus sont les *facteurs* de l'équation ;
5. pour chacun des facteurs, chercher l'ensemble des nombres qui annulent ce facteur. Cela résoud l'équation grâce au résultat fondamental :

   Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul,
   Si l'un des facteurs d'un produit de facteurs est nul, alors le produit est nul ;
6. parmi les solutions trouvées, éliminer celles qui ne sont pas dans $\mathscr{D}$.

Résolution des inéquations . — Les inéquations algébriques sont de la forme $f(x) > g(x)$ (ou $f(x) \geq g(x)$). On donne la méthode à suivre pour résoudre $f(x) > g(x)$. Cette méthode reste valable pour résoudre $f(x) \geq g(x)$ à condition de remplacer $>$ par $\geq$. Voilà la méthode :

1. déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'inéquation ;
2. écrire l'inéquation sous la forme $f(x) - g(x) > 0$;
3. écrire l'inéquation sous la forme $P(x) > 0$ où P est un polynôme : si nécessaire, on procédera par réduction au même dénominateur ;
4. factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 et 2, les polynômes obtenus sont les *facteurs* de l'équation ;
5. dans un tableau de signes, étudier le signe de chaque facteur est en déduire le signe de P. Pour cela, on utilise le résultat fondamental suivant :

   Le produit de *deux* facteurs de même signe est positif,
   Le produit de *deux* facteurs de signes différents est négatif ;
6. parmi les solutions trouvées, éliminer celles qui ne sont pas dans $\mathscr{D}$.

Remarque : il faut constater que les équations $f(x) < g(x)$ se récrivent $g(x) > f(x)$ et sont donc de la forme qu'on a donnée. À condition d'échanger les noms de f et g.

SAVOIR

Résolution des équations de degré 1

Si a et b sont deux nombres réels, avec $a \neq 0$, l'ensemble des solutions de $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$. Autrement dit, l'unique nombre réel x tel que $ax + b$ est nul est $x = -\frac{b}{a}$.

— EXERCICES —

I) Résoudre les équations suivantes :

1) $6x-6=-4+5x$
2) $-2y+3=-4-2y$
3) $7z-7=7(z-1)$
4) $t^2+6t+1=5+6t$
5) $14(u-12)=u^2(u-12)$
6) $123v(v^2-17)=0$
7) $(w^2+25)(w^2-16)(33w+44)=0$
8) $\dfrac{(x+1)^2-81}{(x+11)(12-x)}=0$
9) $a^2=\dfrac{1}{a}$
10) $\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{1}{b+1}$
11) $\dfrac{1}{c-1}-\dfrac{1}{c+1}=2$
12) $(3d+1)^2+(1-2d)^2=0$
13) $(3x+1)^2=(1-2x)^2$.

SAVOIR

Résolution des inéquations de degré 1

Si a et b sont deux nombres réels avec $a\neq 0$, on veut résoudre $ax+b>0$, c'est–à–dire trouver l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $ax+b$ est strictement positif. On sait en fait donner le signe de $ax+b$ en fonction des valeurs de x, ce qui permet de résoudre l'inéquation. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	signe de $-a$		signe de a

— EXERCICES —

II) Résoudre les inéquations suivantes : **1)** $5x-7>0$ **2)** $7x-9\geq 0$ **3)** $16x-25<0$
4) $x-\sqrt{12}\leq 0$ **5)** $25x-10>3-2x$ **6)** $7+6x\geq 6(x+1)$
7) $3-6x\geq -6(x-1)$ **8)** $16x^2-4x+2>(4x-1)^2$ **9)** $(-2x-1)^4>0$
10) $(-2x-1)^4\geq 0$ **11)** $(9x+16)^2\leq 0$ **12)** $(9x+12)^3>0$

SAVOIR

Résolution des équations de degré 2

Résolution . — Si a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$, on cherche les solutions de $ax^2+bx+c=0$. Autrement dit, on cherche les nombres réels x tels que ax^2+bx+c s'annule. L'existence et le nombre de solutions dépend d'un nombre noté Δ et appelé *discriminant*. On le calcule par $\Delta = b^2-4ac$. Le calcul de Δ étant fait, on résoud l'équation grâce au tableau suivant :

Signe de Δ	nombre de solutions	solutions
$\Delta < 0$	aucune	
$\Delta = 0$	une	$x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	deux	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Factorisation . — Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions x_1 et x_2, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution x_1, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$.

Somme et produit des solutions . — Si on trouve deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ alors, x_1 et x_2 sont les solutions de $ax^2+bx+c=0$. D'autre part, si deux nombres réels x_1 et x_2 sont les deux solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$, alors $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

SAVOIR

Résolution des inéquations de degré 2

Si a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$, on cherche à résoudre $ax^2+bx+c>0$. On va donner une méthode donnant le signe de ax^2+bx+c en fonction de x, cela permet aussi de résoudre $ax^2+bx+c<0$. Il faut distinguer trois cas suivant le signe du discriminant.

1^er^ cas $\Delta > 0$. Dans ce cas, on note x_1 et x_2 les deux solutions de $ax^2+bx+c=0$ avec $x_1 < x_2$.

Valeurs de x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	signe de a		signe de $-a$		signe de a

2^e^ cas $\Delta = 0$. Dans ce cas, on note x_1 la seule solution de $ax^2+bx+c=0$.

Valeurs de x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	signe de a		signe de a

3^e^ cas $\Delta < 0$.

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	signe de a	

Remarque : il faut constater que l'ensemble des nombres réels x tels que $ax^2+bx+c \geq 0$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $ax^2+bx+c>0$ auquel il faut joindre l'ensemble des réels x tels que $ax^2+bx+c=0$.

III) Résoudre les équations suivantes : **1)** $3x^2-7x+4=0$ **2)** $y^2+y+2=0$ **3)** $3z^2-3z-1=0$ **4)** $t^2+\sqrt{7}t+\sqrt{2}=0$ **5)** $(u^2-u-1)(-u^2+u+1)=0$ **6)** $v^3+v^2+1=2-v^2$. **7)** $\frac{1}{w+2}-\frac{1}{w-3}=\frac{6}{5}$ **8)** $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}=\frac{4}{5}$ **9)** $\frac{a^2+a-2}{a^2+a-1}=0$ **10)** $b^2-15b+66=0$ **11)** $x+\frac{1}{x}=3$ **12)** $\sqrt[3]{k^2}-3\sqrt[3]{k}-2=0$ **13)** $x^4-15x^2+56=0$.

IV) Résoudre les inéquations suivantes : **1)** $x^2-9x+10>0$ **2)** $-3x^2+2x+4\leq 0$ **3)** $x^2+\sqrt{2}x+1\leq 0$ **4)** $x^2-4x+3<2x-4$ **5)** $x^2-4x+3\geq 2x^2-5$ **6)** $2(x+1)^2>(3x+4)(x+1)$ **7)** $\frac{x-2}{x+1}>2x$ **8)** $\frac{x^2-6x+5}{x^2+x+1}>0$ **9)** $\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+4}\geq 0$.

V) On suppose que α est un nombre réel. Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution ou combinaison : **1)** $\begin{cases}3x-2y=1\\5x+4y=7\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}4x-3y=2\\-8x+6y=\alpha\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=1\\\sqrt{3}x+y=5\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=\sqrt{7}\\\sqrt{6}x-3y=\sqrt{5}\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}\sqrt{x}-2y=3\\2\sqrt{x}-7y=3\end{cases}$

6) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2\\\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=3.\end{cases}$

VI) Une crème de beauté est vendue dans une boîte contenant $6,4$ grammes de crème. Cette boîte est vendue 9,50 €. Quel est le prix d'un kilogramme de cette crème ?

VII) Une entreprise emploie 14 femmes et 35 hommes. Le directeur des ressources humaines envisage d'embaucher autant d'hommes que de femmes. Combien doit-il embaucher de personnes pour qu'après l'embauche, le nombre de femmes employées dans l'entreprise soit les deux-tiers du nombre d'hommes ?

VIII) Un cycliste parcourt la route reliant A à B. Sur les parties plates, sa vitesse est de 12 kilomètres par heure ; en montée, sa vitesse est de 8 kilomètres par heures et en descente, sa vitesse est de 15 kilomètres par heures. On suppose qu'il n'y a pas de vent. De A vers B, le cycliste met 5 heures. De B vers A, il met 4 heures. Sachant que les parties plates ont une longueur totale de 28 kilomètres, quelle est la longueur des montées en allant de A vers B ?

IX) Si on enroulait une ficelle autour de l'équateur de la Terre et que l'on rallongeait la ficelle d'un mètre pour former une nouvelle circonférence au dessus de l'équateur, à quelle hauteur au dessus du sol se trouverait la ficelle ? Même question avec un ballon rond.

X) Dans un grenier, on a découvert une facture de 1890 : l'achat de 15 kg de sucre et 7 kg de café revenait à 42F. Une autre facture de la même année montre que l'achat de 8 kg de sucre et 3kg de café revenait à 20,20F. Quel était le prix du café ?

XI) La somme des longueurs des quatre côtés d'un rectangle est 240 m. Son aire est 3200 m^2. Calculer la longueur de chacun des côtés.

XII) Une personne répartit 30000 € sur deux comptes à deux taux différents. La première somme, placée au taux le plus élevé, produit un intérêt annuel de 880 € et la seconde somme produit un intérêt annuel de 280 €. Sachant que la différence des taux est $0,5\%$, calculer les sommes placées sur chaque compte et les deux taux.

XIII) Deux automobilistes effectuent le même parcours de 400km. Le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins. Donner la vitesse de chacun d'eux et le temps utilisé pour parcourir le trajet.