Licence AES Troisième année

Croissance

Première évaluation : 3 décembre 2011

Nous considérons une économie dont la population active augmente à un taux exogène noté n et disposant d'une technologie décrite par la fonction de production agrégée Cobb–Douglas $Y(t) = K(t)^{\alpha} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}$. Dans cette expression, $N(t)$ et $K(t)$ désignent respectivement le volume de travail homogène et le stock de capital disponibles à la date t ; $A(t)$ augmente au taux $a \geq 0$ (sauf lorsque son évolution est décrite explicitement). Collectivement, les ménages consomment une fraction $c > 0$ du revenu national et en épargnent une fraction $0 < s < 1$. L'économie est fermée, et il n'existe pas d'État prélevant et utilisant des ressources. Enfin, le taux de dépréciation du capital est noté δ, avec $0 < \delta < 1$.

1. On suppose $0 < \alpha < 1$. Calculez la productivité marginale du capital, puis la dérivée seconde. La productivité marginale du capital est-elle une fonction du capital croissante, décroissante, constante, etc. ? [1 point]
   Les conditions d'Inada sont-elles vérifiées ? [1 point]
2. Montrez que l'accumulation du capital est de la forme
   $$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = sK(t)^{\alpha-1} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} - \delta.$$
   Quelle est la solution de $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = 0$?
   Définissez l'état stationnaire. Cette économie admet-elle un unique stock de capital stationnaire $K^{\star}$? [3 × 1 points]
3. Écrivez la loi d'accumulation du capital par tête $k(t) = \frac{K(t)}{N(t)}$.
   Quelle est la solution de $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0$? Cette économie admet-elle un unique stock de capital par tête stationnaire $k^{\star}$? [3 × 1 points]
4. Écrivez la loi d'accumulation du capital par unité de travail intensif $\mathcal{K}(t) = \frac{K(t)}{A(t)N(t)}$.
   Quelle est la solution de $\frac{\dot{\mathcal{K}}(t)}{\mathcal{K}(t)} = 0$? Cette économie admet-elle un unique stock de capital par unité de travail intensif stationnaire $\mathcal{K}^{\star}$?
   Quel est l'impact d'une hausse de $\mathcal{K}$ sur $\frac{\dot{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}}$? Expliquez ce que cela implique d'un point de vue économique. (Vous pouvez calculer le signe de $\frac{d\dot{\mathcal{K}}(t)/\mathcal{K}(t)}{d\mathcal{K}(t)}$ pour vous aider à répondre à cette question) [4 × 1 points]

5. Quels sont les taux de croissance de long terme des variables suivantes ?[4 points]
   - revenu par unité de travail intensif
   - stock de capital total
   - consommation par tête
   - épargne totale
   - investissement par unité de capital intensif
   - emploi total
   - salaire unitaire (celui d'un individu)
   - rémunération moyenne du capital (pour un euro investi)
6. On fait désormais l'hypothèse que $\alpha = 1$. Expliquez ce que cela change pour la dynamique de long terme de l'économie. [2 × 1 points]
   Représentez graphiquement cette évolution : représentez l'évolution du capital $\dot{k}(t)$ ou le taux de croissance du capital $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ en fonction de son niveau $k(t)$.
7. On suppose à nouveau $\alpha < 1$ et on endogénéise le progrès technique de la façon suivante : $A(t) = A^{\frac{1}{1-\alpha}} K(t)$, avec $A > 0$. Décrivez la dynamique à long terme de cette économie (par exemple, celle du capital total K). [1 point]
   Comment justifier ce lien entre progrès technique et accumulation de capital ? Sous cette hypothèse, les agents privés produisent-ils suffisamment ? [1 point]
8. **[Bonus]** L'un des faits stylisés kaldoriens concerne le partage de la valeur ajoutée. Que cela nous apprend-il sur les valeurs plausibles de α ? [2 points]