**Licence AES Troisième année**

**Croissance**

Première évaluation : 3 décembre 2011

Nous considérons une économie dont la population active augmente à un taux exogène noté $n$ et disposant d'une technologie décrite par la fonction de production agrégée Cobb–Douglas $Y(t) = K(t)^{\alpha} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}$. Dans cette expression, $N(t)$ et $K(t)$ désignent respectivement le volume de travail homogène et le stock de capital disponibles à la date $t$ ; $A(t)$ augmente au taux $a \geq 0$ (sauf lorsque son évolution est décrite explicitement). Collectivement, les ménages consomment une fraction $c > 0$ du revenu national et en épargnent une fraction $0 < s < 1$. L'économie est fermée, et il n'existe pas d'État prélevant et utilisant des ressources. Enfin, le taux de dépréciation du capital est noté $\delta$, avec $0 < \delta < 1$.

1. On suppose $0 < \alpha < 1$. Calculez la productivité marginale du capital, puis la dérivée seconde. La productivité marginale du capital est-elle une fonction du capital croissante, décroissante, constante, etc. ? [1 point]
   Les conditions d'Inada sont-elles vérifiées ? [1 point]

---

$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} > 0$ et $\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial K(t)^2} = \alpha\left(\alpha - 1\right) K(t)^{\alpha-2} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} < 0$ dès que $K(t)$ et $N(t)$ sont positifs. La productivité marginale du capital est positive et décroissante (elle est ici concave).
$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} \Rightarrow \lim\limits_{K(t)\to 0} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = +\infty$ et $\lim\limits_{K(t)\to +\infty} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = 0$.
$\frac{\partial Y(t)}{\partial N(t)} = \left(1-\alpha\right) K(t)^{\alpha} \left[A(t)N(t)\right]^{-\alpha} \Rightarrow \lim\limits_{N(t)\to 0} \frac{\partial Y(t)}{\partial N(t)} = +\infty$ et $\lim\limits_{N(t)\to +\infty} \frac{\partial Y(t)}{\partial N(t)} = 0$.

2. Montrez que l'accumulation du capital est de la forme

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = sK(t)^{\alpha-1} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} - \delta.$$

   Quelle est la solution de $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = 0$ ?
   Définissez l'état stationnaire. Cette économie admet-elle un unique stock de capital stationnaire $K^{\star}$ ? [3 × 1 points]

---

$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$ et $I(t) = Y(t) - C(t) = (1-c)Y(t) = sK(t)^{\alpha} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}$.
On obtient en combinant $\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} - \delta K(t)$, d'où le taux de croissance du capital $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = sK(t)^{\alpha-1} \left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha} - \delta$.
$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = 0$ ssi $K(t) = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t)N(t)$. On voit que cette solution n'est pas

constante, mais qu'elle augmente avec le progrès technique et la croissance démographique.
Une économie atteint un état stationnaire si il existe un niveau de capital dont on ne s'écarte pas spontanément. Le stock de capital total dans cette économie n'admet pas d'état stationnaire : supposons qu'à l'instant $t_0$, $K(t_0) = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t_0)N(t_0)$. À l'instant $t_1 > t_0$, $A(t_1)N(t_1) > A(t_0)N(t_0)$, ce qui implique une augmentation du stock de capital : $sK(t_0)^{\alpha-1}\left[A(t_1)N(t_1)\right]^{1-\alpha} - \delta > 0$.

3. Écrivez la loi d'accumulation du capital par tête $k(t) = \frac{K(t)}{N(t)}$.
   Quelle est la solution de $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0$ ? Cette économie admet-elle un unique stock de capital par tête stationnaire $k^\star$ ? [$3 \times 1$ points]

   ---

   $\dot{k}(t) = s\frac{K(t)^\alpha\left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}}{N(t)} - \delta\frac{K(t)}{N(t)} - \frac{K(t)}{N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = sk(t)^\alpha A(t)^{1-\alpha} - (\delta + n)\,k(t)$.
   $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0$ ssi $k(t) = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t)$. Cette solution dépend de la valeur du facteur technologique $A$.
   Cette économie n'admet un stock de capital par tête stationnaire que si $A$ est constant au cours du temps.

4. Écrivez la loi d'accumulation du capital par unité de travail intensif $\mathcal{K}(t) = \frac{K(t)}{A(t)N(t)}$.
   Quelle est la solution de $\frac{\dot{\mathcal{K}}(t)}{\mathcal{K}(t)} = 0$ ? Cette économie admet-elle un unique stock de capital par unité de travail intensif stationnaire $\mathcal{K}^\star$ ?
   Quel est l'impact d'une hausse de $\mathcal{K}$ sur $\frac{\dot{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}}$ ? Expliquez ce que cela implique d'un point de vue économique. (Vous pouvez calculer le signe de $\frac{d\dot{\mathcal{K}}(t)/\mathcal{K}(t)}{d\mathcal{K}(t)}$ pour vous aider à répondre à cette question) [$4 \times 1$ points]

   ---

   $\dot{\mathcal{K}}(t) = s\frac{K(t)^\alpha\left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}}{A(t)N(t)} - \delta\frac{K(t)}{A(t)N(t)} - \frac{K(t)}{A(t)N(t)}\left(\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\right) = s\mathcal{K}(t)^\alpha - (\delta + n + a)\,\mathcal{K}(t)$.
   $\frac{\dot{\mathcal{K}}(t)}{\mathcal{K}(t)} = 0$ ssi $\mathcal{K}(t) = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Exprimée en variables par unité de travail intensif, cette économie admet un unique état stationnaire (strictement positif).
   $\frac{d\dot{\mathcal{K}}(t)/\mathcal{K}(t)}{d\mathcal{K}(t)} = (\alpha - 1)\,s\mathcal{K}(t)^{\alpha-1} < 0$. Lorsque le stock de capital par unité de travail intensif est supérieur à son niveau d'état stationnaire, son taux de croissance est donc inférieur à celui d'état stationnaire, c'est-à-dire négatif. L'état stationnaire unique de cette économie est donc également stable, ce qui signifie que l'économie se dirige vers l'état stationnaire quel que soit sa condition initiale.

5. Quels sont les taux de croissance de long terme des variables suivantes ? [4 points]

| | | |
|---|---|---|
| – | revenu par unité de travail intensif | 0 |
| – | stock de capital total | a+n |
| – | consommation par tête | a |
| – | épargne totale | a+n |
| – | investissement par unité de capital intensif | 0 |
| – | emploi total | n |
| – | salaire unitaire (celui d'un individu) | a |
| – | rémunération moyenne du capital (pour un euro investi) | 0 |

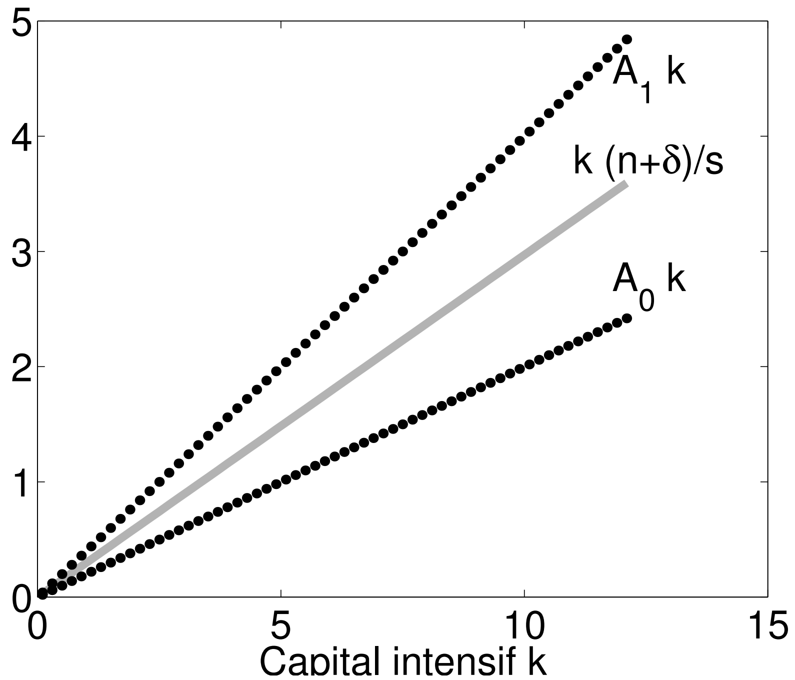
6. On fait désormais l'hypothèse que $\alpha = 1$. Expliquez ce que cela change pour la dynamique de long terme de l'économie. [$2 \times 1$ points]

   Représentez graphiquement cette évolution : représentez l'évolution du capital $\dot{k}(t)$ ou le taux de croissance du capital $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ en fonction de son niveau $k(t)$.

---

Le taux de croissance de K devient $s - (\delta + a + n)$. Suivant les valeurs des paramètres, ce taux est

- positif et les variables intensives de l'économie progressent à ce rythme (pas d'état stationnaire)
- négatif et les variables intensives de l'économie se contractent à ce rythme (pas d'état stationnaire)
- nul, et l'économie intensive reste de façon permanente à son point de départ. Cette économie admet alors une infinité d'états stationnaires.




7. On suppose à nouveau $\alpha < 1$ et on endogénéise le progrès technique de la façon suivante : $A(t) = A^{\frac{1}{1-\alpha}} K(t)$, avec $A > 0$. Décrivez la dynamique à long

terme de cette économie (par exemple, celle du capital total $K$). [1 point]
Comment justifier ce lien entre progrès technique et accumulation de capital ? Sous cette hypothèse, les agents privés produisent-ils suffisamment ? [1 point]

---

$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha}\left[A^{\frac{1}{1-\alpha}}K(t)N(t)\right]^{1-\alpha} - \delta K(t) = sAK(t)N(t)^{1-\alpha} - \delta K(t)$. On retrouve avec cette formulation des rendements constants dans les facteurs accumulables, comme dans le modèle $AK$ de la question précédente : il n'y a plus *au niveau social* de décroissance de la productivité marginale du capital, ce qui affecte aussi bien l'existence que l'unicité de l'état stationnaire de l'économie en niveau. Si $N(t)^{1-\alpha} > \frac{\delta}{sA}$, les variables par tête augmentent à un taux croissant avec la taille de l'économie (mesurée par la population $N$). Il s'agit d'un modèle d'apprentissage par la pratique, dans lequel le stock de capital agrégé résume les productions passées de l'ensemble des firmes. Le point important est que chaque entreprise ignore les effets de ses propres décisions de production/accumulation sur l'évolution du facteur $A$. Sinon, ces rendements croissants donneraient naissance à un monopole naturel.
Cette externalité positive implique que les acteurs privés sous-estime la rentabilité sociale de leurs décisions de production et d'accumulation.

8. **[Bonus]** L'un des faits stylisés kaldoriens concerne le partage de la valeur ajoutée. Que cela nous apprend-il sur les valeurs plausibles de $\alpha$ ? [2 points]

---

Les parts des revenus du travail et du capital sont assez stables au cours du temps et similaires entre pays ; elles s'établissent respectivement autour de deux tiers et d'un tiers. Avec une fonction de production Cobb-Douglas et des marchés parfaitement compétitifs, la part des revenus du capital dans l'output est égale à $\alpha$.