Licence AES Troisième année
Croissance
Seconde évaluation : 5 mars 2013

Prix des facteurs dans les modèles de Solow et AK

Considérons une économie dans laquelle deux facteurs sont utilisés pour produire du bien final : $K(t)$ unités de capital et $N(t)$ unités de travail. La technologie est décrite par la fonction de production suivante $Y(t) = K(t)^{\alpha}\left[A(t)N(t)\right]^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. La population est constante. Le facteur A augmente au taux $a > 0$. Les ménages épargnent une faction constante $0 < s < 1$ de leur revenu et le taux de dépréciation du capital physique est noté $0 < \delta < 1$.

Vous pouvez répondre aux questions de façon indépendante.

1. Les firmes de l'économie que nous considérons ont pour objectif de maximiser leur profit, en prenant les prix des facteurs de production comme donnés. Montrez que les rémunérations unitaires des facteurs travail, $w(t)$, et capital, $z(t)$, valent respectivement **[1 pt]**

$$\begin{cases} w(t) &= (1-\alpha)A(t)\left[\frac{K(t)}{A(t)N(t)}\right]^{\alpha} \\ z(t) &= \alpha\left[\frac{A(t)N(t)}{K(t)}\right]^{1-\alpha} \end{cases}$$

Chacun des facteurs est rémunéré à sa productivité marginale : $w(t) = \frac{\partial F[K(t),A(t)N(t)]}{\partial N(t)}$ et $z(t) = \frac{\partial F[K(t),A(t)N(t)]}{\partial K(t)}$. Dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas, on trouve les expressions indiquées.

2. On note $k^{\star}$ la valeur du stock de capital par unité de travail intensif à l'état stationnaire. Calculez les rémunérations du capital $z^{\star}$ et du travail $w^{\star}$ correspondant à cette valeur. **[1 pt]**

Lorsque le stock de capital intensif $\frac{K(t)}{A(t)N(t)}$ vaut $k^{\star}$, les productivités marginales du travail et du capital deviennent respectivement

$$\begin{cases} w(t) &= (1-\alpha)A(t)k^{\star\alpha} \\ z(t) &= \alpha\left[1/k^{\star}\right]^{1-\alpha} \end{cases}$$

3. Représentez graphiquement l'état stationnaire de cette économie. Calculez la valeur de $k^{\star}$ en fonction des paramètres du modèle. **[2 pts]**

Le stock de capital intensif à l'état stationnaire, $k^{\star}$, vérifie l'égalité suivante : $f\left(k^{\star}\right) = k^{\star\alpha} = \frac{\delta+a}{s} \cdot k^{\star}$, soit $k^{\star} = \left[\frac{\delta+a}{s} \cdot k^{\star}\right]^{1/\alpha}$.

Prix des facteurs et croissance dans le modèle de Solow

4. Montrez que la productivité marginale du capital est constante le long du sentier de croissance équilibrée. **[2 pts]**

Lorsque l'économie évolue le long du sentier de croissance équilibrée, le stock de capital intensif $k^\star$ est constant, de même que $f'(k^\star)$, la hausse de la production par unité de travail efficace rendue possible par une hausse du stock de capital intensif. Par conséquent, la productivité marginale du capital $\frac{\partial F(K_t, A_t N_t)}{\partial K_t}$ est constante. C'est donc aussi le cas de la rémunération du capital.

5. Comment la productivité marginale du travail évolue t-elle le long du sentier de croissance équilibrée ? La réponse à cette question serait-elle différente si la population augmentait aux taux $n > 0$? **[2 pts]**

Le raisonnement est similaire : la constance de $k(t)$ lorsque l'économie est sur le sentier de croissance équilibrée implique la constance de $f[k(t)] - k(t) f'[k(t)]$. La productivité marginale du travail augmente donc au rythme du progrès technique.

Remarquez que la productivité marginale du travail <u>efficace</u> est, elle, constante : seul le progrès technique portant sur le travail rend possible la hausse tendancielle de la production d'un travailleur supplémentaire.

6. Au cours du temps, comment évolue le rapport du coût du travail au coût du capital (c'est-à-dire le coût relatif du travail) ? Mettez en évidence le lien entre l'évolution de ce coût relatif et l'accumulation de capital par tête au cours du temps. **[3 pts]**

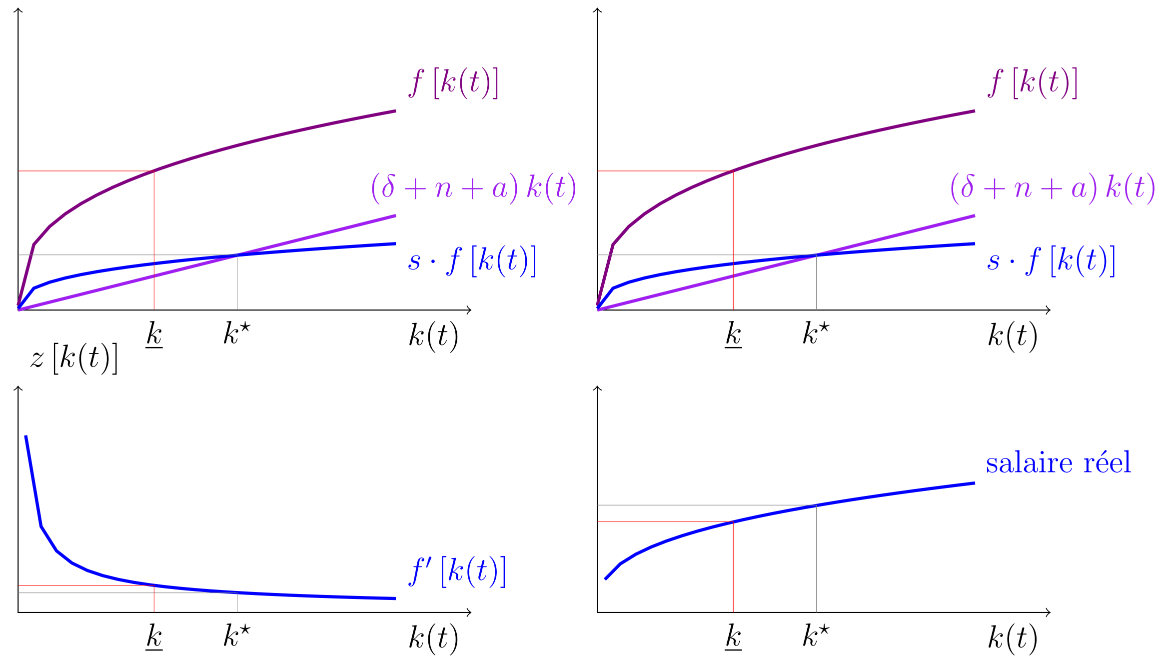
La hausse de la productivité marginale du travail entraîne une hausse de la rémunération du travail, c'est-à-dire du salaire réel, alors que la rémunération du capital est constante. Petit à petit, le facteur travail devient donc relativement plus cher par rapport au facteur capital. Il n'est donc pas surprenant que les entreprises substituent du capital au travail. Cette substitution est précisément à l'origine de la hausse du stock de capital par tête qui se produit le long du sentier de croissance équilibrée.

La dynamique transitoire dans le modèle de Solow

7. On suppose que le stock de capital par unité de travail intensif est inférieur à son état stationnaire, $\underline{k} < k^\star$. Comparez la rémunération du capital avec son niveau d'état stationnaire $z^\star$. Comparez la rémunération du travail avec

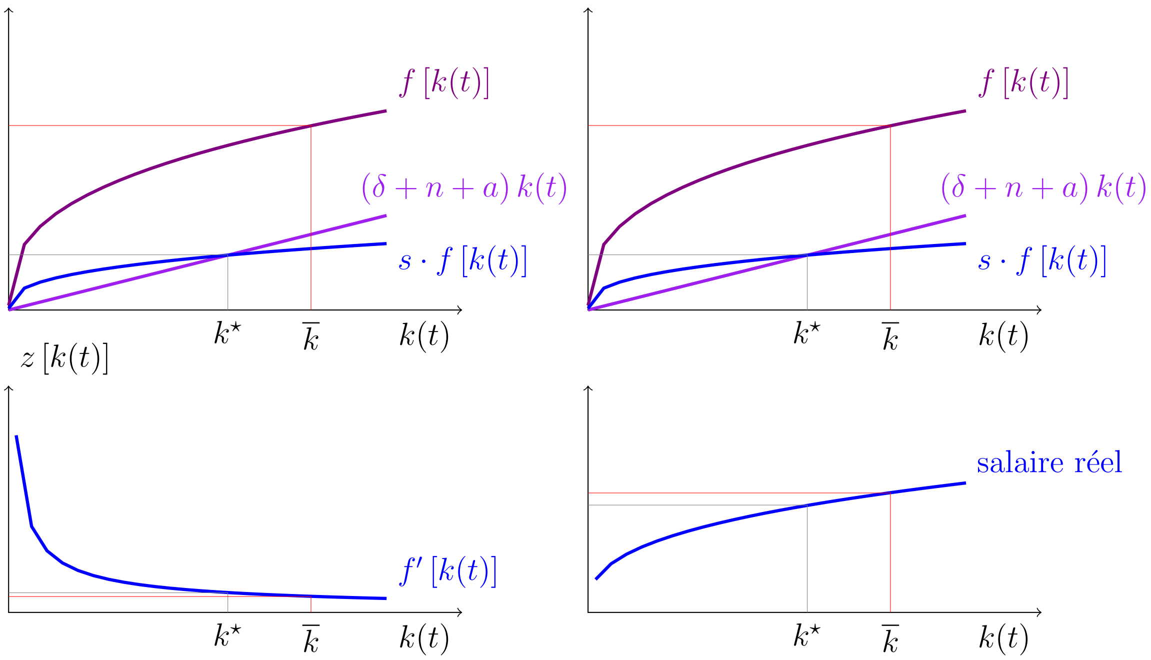
son niveau d'état stationnaire $w^\star$. *(Vous pouvez utiliser des représentations graphiques si vous le souhaitez.)* **[2 pts]**
Que ces rémunérations impliquent-elles en matière de capital par tête ? **[1 pt]**

La rémunération du capital est une fonction décroissante du stock de capital par travailleur ; celle du travail aumente avec l'intensité capitalistique. Lorsque l'intensité capitalistique est inférieure à son état stationnaire, le capital est mieux rémunéré et le travail moins rémunéré qu'à l'état stationnaire. Il est donc intéressant de faire augmenter la quantité de capital disponible par tête, c'est-à-dire d'accumuler du capital. Graphiquement :



8. On suppose que le stock de capital par unité de travail intensif est supérieur à son état stationnaire, $\overline{k} > k^\star$. Comparez la rémunération du capital avec son niveau d'état stationnaire $z^\star$. Comparez la rémunération du travail avec son niveau d'état stationnaire $w^\star$. *(Vous pouvez utiliser des représentations graphiques si vous le souhaitez.)* **[2 pts]**
Que ces rémunérations impliquent-elles en matière de capital par tête ? **[1 pt]**

C'est la situation symétrique de la précédente. Lorsque l'intensité capitalistique est supérieure à son état stationnaire, le capital est moins rémunéré et le travail mieux rémunéré qu'à l'état stationnaire. Les prix de facteurs incitent donc entreprises et ménages à remplacer du capital par du travail, c'est-à-dire diminuer la quantité de capital disponible par tête.



La dynamique transitoire dans le modèle AK

On étudie désormais une version de cette économie dans laquelle $\alpha \to 1$ et $a \to 0$, c'est-à-dire une technologie de la forme $Y(t) = AK(t)$.

9. Calculez la rémunération unitaire du capital $z(t)$. **[1 pt]**

Le capital est rémunéré à sa productivité marginale, c'est-à-dire A.

10. Cette rémunération dépend-elle du stock de capital ? Que cela implique t-il en matière d'accumulation de capital ? Comparez avec le modèle utilisé précédemment ? **[2 pts]**

La rémunération du capital ne dépend pas des quantités de facteurs. Le capital n'est donc pas plus rémunérateur lorsqu'il est 'rare', ou peu rémunérateur lorsqu'il est abondant. Il n'existe donc pas de niveau de capital particulier vers lequel les signaux de prix conduisent.

Dans le modèle de Solow, le lien entre capital par tête et rémunération du capital assure l'existence et la stabilité d'un état stationnaire. Dans AK, cette force de rappel n'existe pas et l'existence d'un état stationnaire n'est pas garanti. Pour les mêmes raisons, s'il existe un état stationnaire, il n'est pas stable