Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités

Activité 5.1.
Un corps, soumis à certaines forces, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par :

$$d(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 21,2t$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0; 20]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps dans les intervalles de temps $[0; 1]$; $[1; 2]$; $[2; 3]$; $[3; 4]$; $[4; 5]$.
   Que constate-t-on ?
   Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

Activité 5.2.
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :
- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_h$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m ?
   (b) Vers quel point *tend* M_h ?

(c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?

(d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de $f(x)$ en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On écrit la plupart du temps $a+h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a+h$ le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b = a+h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite. On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en a* et on appelle A le *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarques.
- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.
  Δx est la différence[1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h \neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a = 2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2) = 12$.

5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point M*, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

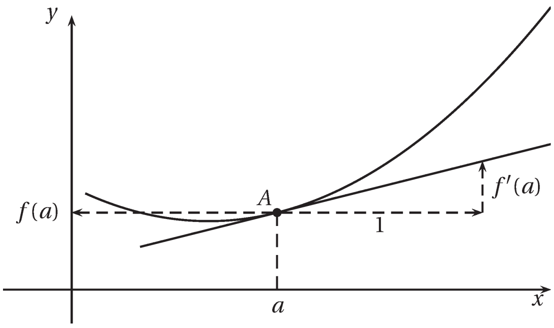
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.
On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

Propriété 5.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 5.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 5.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 5.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.*
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve. On sait déjà que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a, donc son équation est de la forme

$$y = f'(a)x + p$$

Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de T_a donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a) \times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

Donc

$$\begin{aligned} T_a : y &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ &= f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ &= f'(a)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

$\diamond$

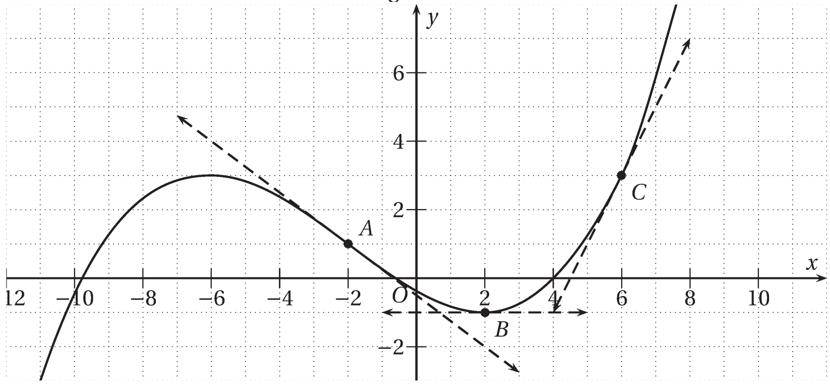
5.4 Exercices

5.4.1 Lectures graphiques de nombres dérivés

EXERCICE 5.1.
On donne sur la figure 5.2 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

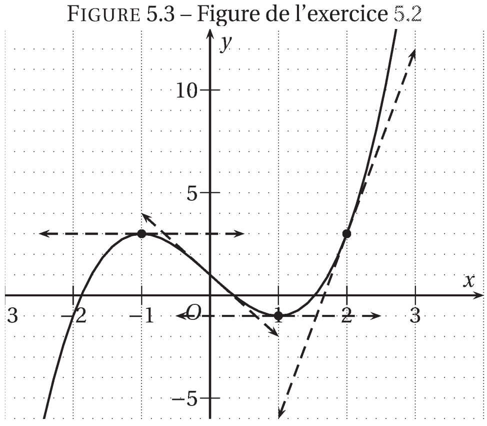
FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.1



EXERCICE 5.2.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 5.3 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

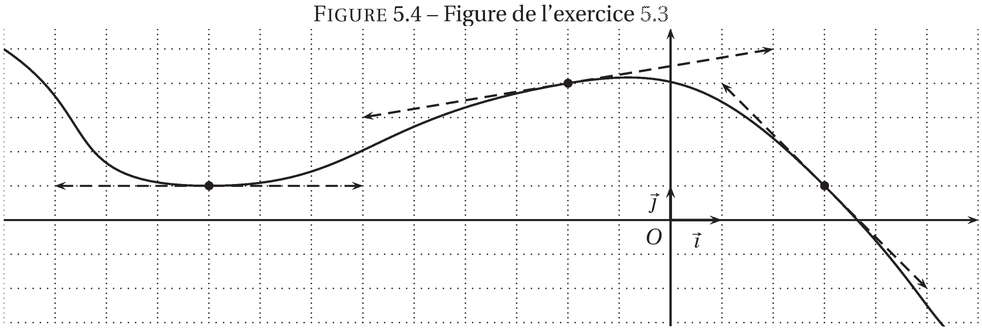
1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1; 26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 5.2



EXERCICE 5.3.
On donne sur la figure 5.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 5.4 – Figure de l'exercice 5.3



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

5.4.2 Tracés

EXERCICE 5.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3\,;0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- f est paire ;
- $f(3) = 9$.

EXERCICE 5.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

EXERCICE 5.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

5.4.3 Nombres dérivés

EXERCICE 5.7.
Dans chacun des cas suivants, on admettra que la fonction est dérivable et on déterminera par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x) = 3x + 7$ en -2.
2. $f(x) = x^2 - 2x$ en 3.
3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en -1.
4. $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en 4.
5. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ en 1.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ en 1.
7. $f(x) = \sqrt{x}$ en 2.

EXERCICE 5.8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer les nombres dérivés de f là où $\mathscr{C}$ coupe les axes.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. Tracer dans un repère les tangentes à la courbe qu'on peut déduire des questions précédentes.
5. Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.