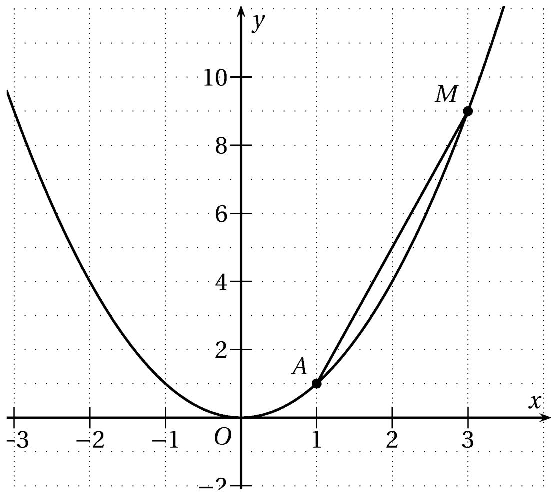
## 2.3 Convexité

### 2.3.1 Activités

**ACTIVITÉ 2.3** (Cas général)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (donnée sur la figure ci-contre).
On note $A$ et $M$ les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et 3.
On veut démontrer que le segment $[AM]$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

1. Donner les coordonnées des points $A$ et $M$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite $(AM)$.
3. Montrer que « $(AM)$ est au-dessus de $\mathscr{C}$ » $\Leftrightarrow$ « $4x-3 \geqslant f(x)$ » $\Leftrightarrow$ « $f(x)-(4x-3) \leqslant 0$ ».
4. Déterminer le signe de $f(x)-(4x-3)$ selon les valeurs de $x$.
5. Conclure




**DÉFINITION.** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *convexe* sur $I$.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *concave* sur $I$.

**ACTIVITÉ 2.4** (Cas d'une fonction dérivable)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Le travail ci-dessous est à effectuer sur Geogebra.

1. (a) Dans la barre de saisie, entrer la fonction $f$.
   (b) Par lecture graphique déterminer sur quel intervalle la fonction est convexe et sur quel intervale elle est concave.
2. Créer un point sur la courbe de $f$.
3. Créer une tangente en $A$ à la courbe de $f$ (quatrième bouton).
4. Déplacer le point $A$ sur la courbe de $f$, là où $f$ est convexe.
   (a) Que constate-t-on quant aux positions relatives de la tangente et de la courbe ?
   (b) Quelle est la variation du coefficient directeur de la tangente (affiché dans la fenêtre algèbre) lorsque l'abscisse de $A$ augmente ?
   Que peut-on en déduire pour la dérivée de $f$ ?
5. Déplacer le point $A$ sur la courbe de $f$, là où $f$ est concave.
   (a) Que constate-t-on quant aux positions relatives de la tangente et de la courbe ?
   (b) Quelle est la variation du coefficient directeur de la tangente (affiché dans la fenêtre algèbre) lorsque l'abscisse de $A$ augmente ?
   Que peut-on en déduire pour la dérivée de $f$ ?
6. À l'aide des observations faites aux questions 4 et 5, compléter les propriétés suivantes :

   **PROPRIÉTÉ.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
   - *« $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $\mathscr{C}$ est ........................................................ de toutes ses tangentes ».*
   - *« $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $\mathscr{C}$ est ........................................................ de toutes ses tangentes ».*

   **PROPRIÉTÉ.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
   - *« $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est ........................................................................ ».*
   - *« $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est ........................................................................ ».*
7. Que peut-on dire de la position de la tangente par rapport à la courbe là où la convexité de $f$ change ?

### 2.3.2 Bilan et compléments

Conformément au programme, sauf mention d'une preuve, les propriétés seront admises.

**Convexité d'une fonction $f$ quelconque**

**Définition 2.1.** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *convexe* sur $I$.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *concave* sur $I$.

**Convexité d'une fonction $f$ dérivable**

**Propriété 2.4** (Convexité et tangentes)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $\mathscr{C}$ est au-dessous de toutes ses tangentes ».*

**Propriété 2.5** (Convexité et dérivée)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable, de dérivée $f'$, sur un intervalle $I$ et dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est croissante ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est décroissante ».*

**Convexité d'une fonction $f$ deux fois dérivable**

**Définition 2.2** (Dérivée seconde)**.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et telle que sa dérivée $f'$ est elle aussi dérivable, alors la dérivée de $f'$ est appellée *dérivée seconde de $f$* et notée $f''$.
On dira alors que $f$ est *deux fois dérivable*.

**Propriété 2.6** (Convexité et dérivée seconde)**.** *Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f''$ est positive ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f''$ est négative ».*

*Preuve.* On sait que « $f$ convexe sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est croissante » or « $f'$ est croissante » $\Leftrightarrow$ « $f''$ est positive ».
De même on sait que « $f$ concave sur $I$ » $\Leftrightarrow$ « $f'$ est décroissante » or « $f'$ est décroissante » $\Leftrightarrow$ « $f''$ est négative ». ◇

**Point d'inflexion**

**Définition 2.3** (Point d'inflexion)**.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On appelle *point d'inflexion* tout point $M$ de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe en $M$ traverse la courbe.

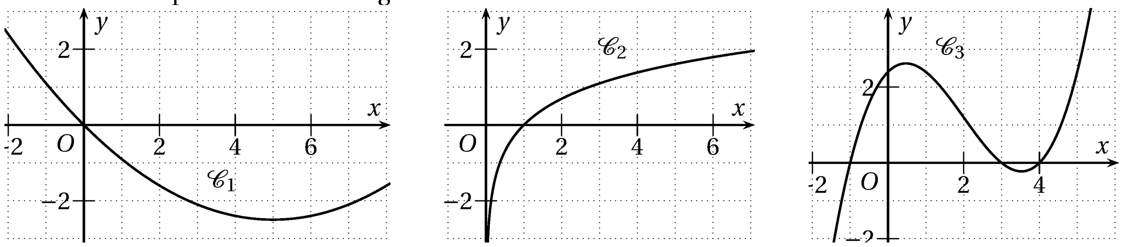
**Propriété 2.7** (Convexité et point d'inflexion)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion.*
*Alors la convexité de $f$ change en $x_M$.*

**Propriété 2.8** (Point d'inflexion et dérivée seconde)**.** *Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Alors :*
*« $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion » $\Leftrightarrow$ « $f''$ s'annule et change de signe en $x_M$ ».*

*Preuve.* « $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion » $\Leftrightarrow$ « la convexité de $f$ change » $\Leftrightarrow$ « la dérivée $f'$ change de sens de variation » $\Leftrightarrow$ « $f''$ s'annule **et** change de signe en $x_M$ ». ◇

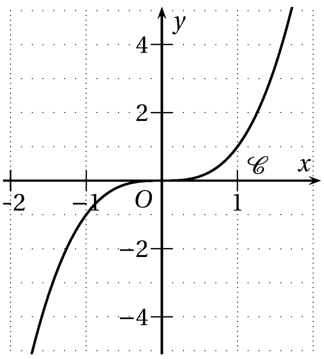
### 2.3.3 Exercices

**EXERCICE 2.15.**
Dans les cas suivants, par lecture graphique, étudier la convexité et l'existence de point(s) d'inflexion des fonctions dont les courbes sont représentées sur la figure ci-dessous.



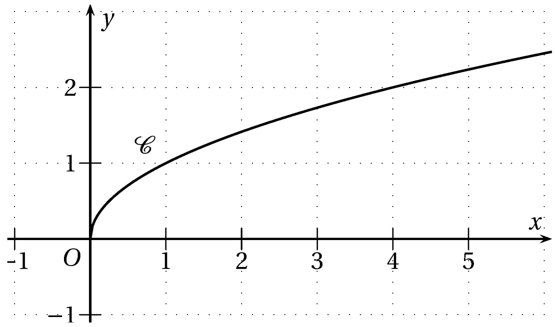

**EXERCICE 2.16** (Fonction cube).
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).

1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.



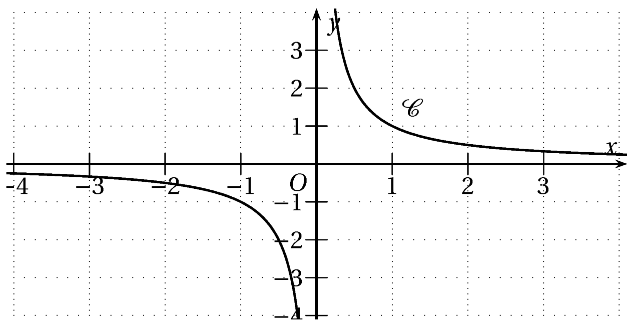

**EXERCICE 2.17** (Fonction racine).
Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).

1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.




**EXERCICE 2.18** (Fonction inverse).
Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).

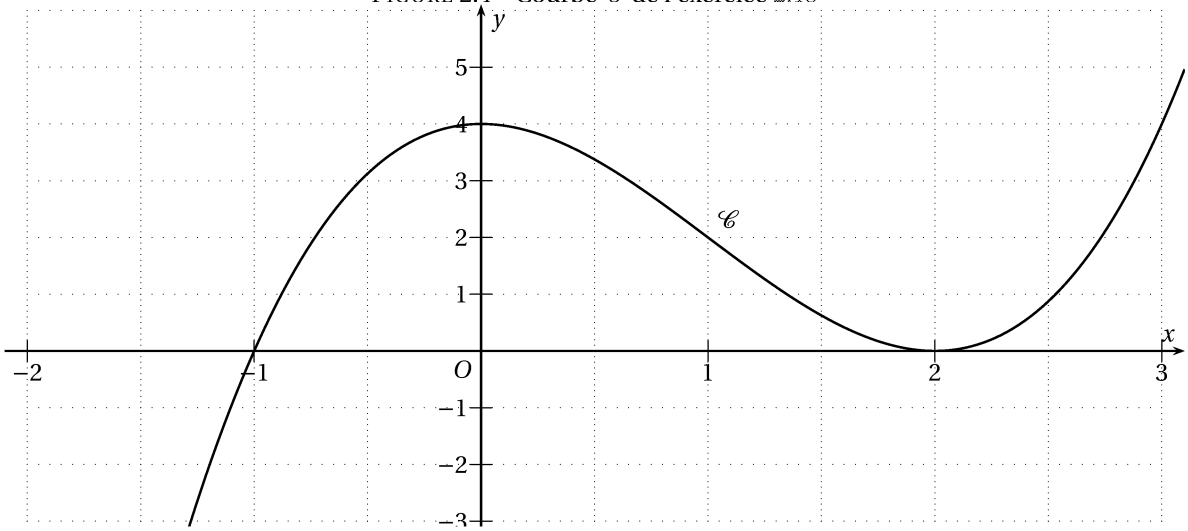
1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.




**EXERCICE 2.19.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée sur la figure 2.4 page suivante*).

1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.
2. Vérifier vos conjectures par le calcul.
3. Donner l'équation des tangentes au(x) point(s) d'inflexion et les tracer sur la figure.

FIGURE 2.4 – Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 2.19




**EXERCICE 2.20.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction (*donnée sur la figure 2.5 page ci-contre*).

1. Par lecture graphique, étudier la convexité de la fonction $f$ selon les valeurs de $x$.
2. En déduire l'existence de trois points d'inflexion.
3. Calculer $f'(x)$, la dérivée de $f$ et vérifier que

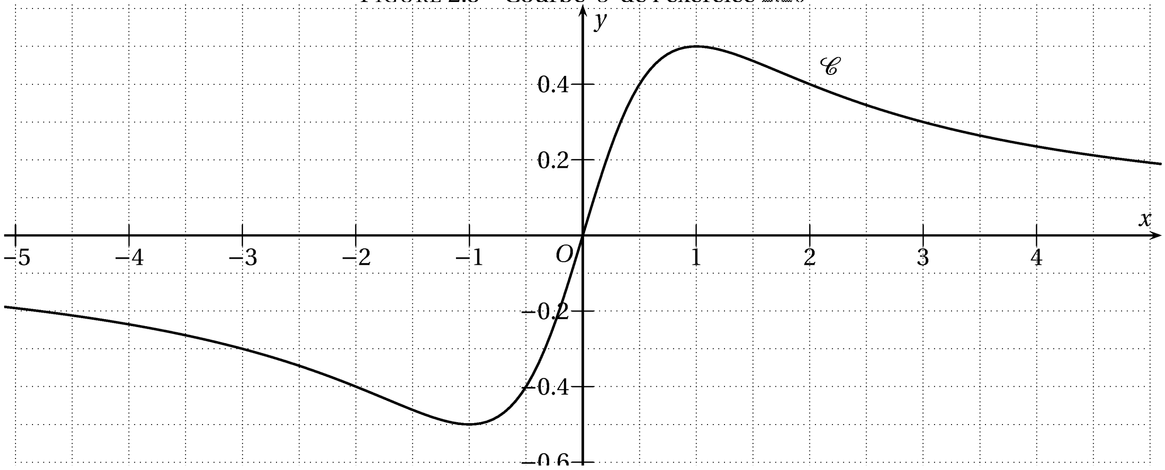
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4. Donner une équation de la tangente $T_0$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. On note $d(x) = x - f(x)$.
   (a) Vérifier que $d(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
   (b) En déduire le signe de $d(x)$ suivant les valeurs de $x$.
   (c) En déduire les positions relatives de la tangente $T_0$ et de la courbe $\mathscr{C}$.
   (d) Que peut-on en déduire pour $O$ (l'origine du repère) ?
6. Un logiciel de calcul formel affiche les données suivantes :

```
(%i4) diff((1-x^2)/(x^2+1)^2,x);
                                                        2
                                  2 x        4 x (1 - x )
(%o4)                         - --------- - ------------
                                  2    2        2    3
                                (x  + 1)      (x  + 1)
(%i5) factor(%o4);
                                              2
                                     2 x (x  - 3)
(%o5)                                ------------
                                        2    3
                                      (x  + 1)
```

   (a) Interpréter cet affichage.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet bien trois points d'inflexion dont on précisera les abscisses.

FIGURE 2.5 – Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 2.20




## 2.4 Problèmes plus ou moins économiques

**PROBLÈME 2.1.**
Le tableau suivant donne les 5 premières tranches du barème de l'impôt sur les grandes fortunes (ISF) pour l'année 2011, en fonction du montant du patrimoine taxable de 2010.

| Tranche du revenu | $x$ : montant du patrimoine taxable, en milliers d'euros | Taux d'imposition 2011 |
|---|---|---|
| Tranche 1 | $x \leqslant 800$ | 0 % |
| Tranche 2 | $800 < x \leqslant 1310$ | 0,55 % |
| Tranche 3 | $1310 < x \leqslant 2570$ | 0,75 % |
| Tranche 4 | $2570 < x \leqslant 4040$ | 1,00 % |
| Tranche 5 | $4040 < x \leqslant 7710$ | 1,30 % |

Exemple : Si $x = 1400$ alors :
- les 800 premiers milliers d'euros, situés dans la première tranche, sont taxés à 0 % ;
- les milliers d'euros $(1310 - 800)$ situés dans la deuxième tranche sont taxés à 0,55 % ;
- les milliers d'euros $(1400 - 1310)$ situés dans la troisième tranche sont taxés à 0,75 %.

Ainsi le montant $I$ de l'impôt est donné par $I = 800 \times \frac{0}{100} + (1310 - 800) \times \frac{0,55}{100} + (1400 - 1310) \times \frac{0,75}{100} = 3,480$.
On a donc : si le patrimoine est de 1,4 millions d'euros, alors le montant de l'ISF est de 3 480 €.

1. Soit $x$ le montant du patrimoine en milliers d'euros. Exprimer, pour chaque tranche d'imposition, le montant $f(x)$, en milliers d'euros, de l'impôt à payer en 2011.
2. Représenter $f$ dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour 1 000 milliers d'euros sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées.
3. Que remarque-t-on à chaque changement de tranche ?
4. La fonction $f$ est-elle continue ?

**PROBLÈME 2.2.**
Une entreprise fabrique des sacs de luxe en cuir. Chaque jour, elle produit un nombre $x$ de sacs, tel que $0 \leqslant x \leqslant 70$.
Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de $x$ sacs est donné par la fonction $f$ définie sur $[0 ; 70]$ par :

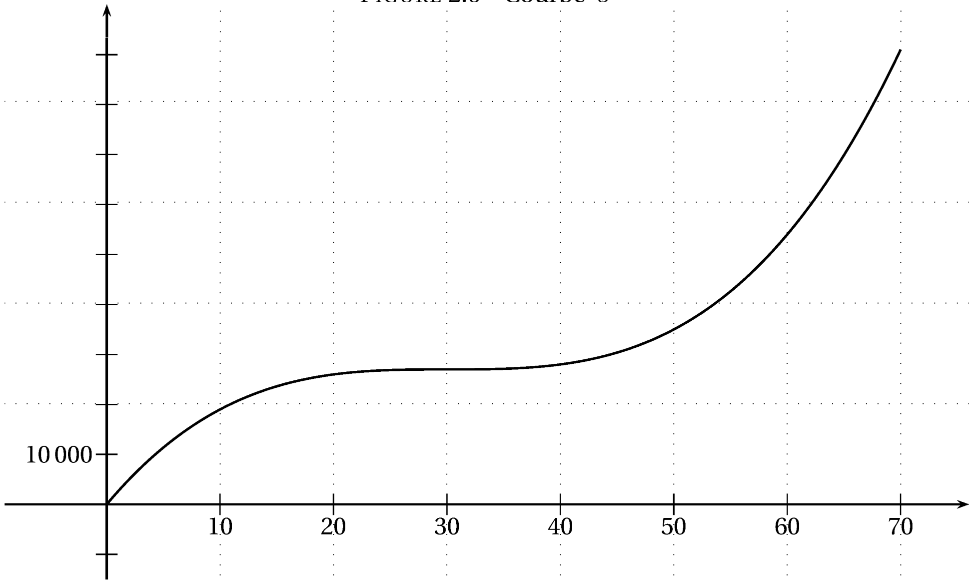
$$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ (*donnée sur la figure 2.6 page suivante*).

**Partie A. Étude de la fonction $f$.**

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$.
2. Étudier la convexité de $f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées $(x_I ; y_I)$.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe en $I$ et représenter cette tangente dans le repère.
4. On appelle *coût marginal* le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût par rapport à la quantité produite.
   Montrer que le coût marginal $C_m$ est minimum en $x_I$.

FIGURE 2.6 – Courbe $\mathscr{C}$



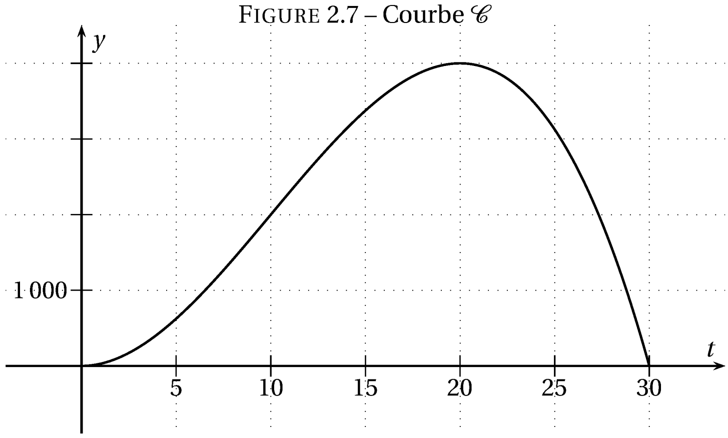

**Partie B. Étude du bénéfice.**
On suppose que tout la production est vendue au prix de 900 euros l'unités. On note $g(x)$ la recette journalière.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$.
2. Tracer sur la figure 2.6 de la présente page la courbe $\Gamma$ représentant la fonction $g$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de sacs que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.
4. On appelle $h$ la fonction donnant le bénéfice de l'entreprise.
   (a) Déterminer une expression de $h(x)$.
   (b) Étudier les variations de $h$ et dresser son tableau de variations en indiquant les extremums.
   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ puis la résoudre.
   (d) Déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (e) Conclure.

**PROBLÈME 2.3.**
Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

**Partie A. Lectures graphiques.**
La courbe $\mathscr{C}$, donnée sur la figure 2.7 de la présente page, représente le nombre de personnes malades en fonction de temps $t$, exprimé en jour depuis le début de la maladie.

FIGURE 2.7 – Courbe $\mathscr{C}$




1. Donner les jours où il y a eu 2 000 malades.
2. Donner le jour où le nombre de malades est maximal ainsi que ce maximum.
3. Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

**Partie B. Étude théorique.**
Le nombre de personnes malades en fonction du temps $t$, exprimé en jour, peut-être modélisé par la fonction $f$, définie sur l'intervalle $[0;30]$, par

$$f(t) = -t^3 + 30t^2$$

La vitesse de propagation de la maladie au jour $t$ est assimilée au nombre dérivé $f'(t)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f$.
2. Déterminer le nombre de solutions sur $[0;30]$ de l'équation $f(t) = 2000$.
3. Un logiciel de calcul formel affiche ceci :

```
(%i1) factor(-x^3+30*x^2-2000);
                                          2
(%o1)                  - (x - 10) (x  - 20 x - 200)
```

   (a) Interpréter cet affichage.
   (b) En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(t) = 2000$ pour $t \in [0;30]$
4. (a) Calculer la dérivée seconde $f''(t)$.
   (b) Étudier le sens de variation de la dérivée $f'$.
   En déduire la convexité de la fonction $f$ et en donner une interprétation.
   (c) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. En donner une signification concrète.
   (d) Calculer la vitesse de propagation de la maladie le dixième jour.

**PROBLÈME 2.4.**
En Économie, on appelle :

**Coûts fixes :** les coûts indépendants du niveau d'activité ou des quantités produites dont l'entreprise doit s'acquitter pour son bon fonctionnement (loyer, coûts administratifs, etc.)

**Coût marginal :** le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût total par rapport à la quantité produite.

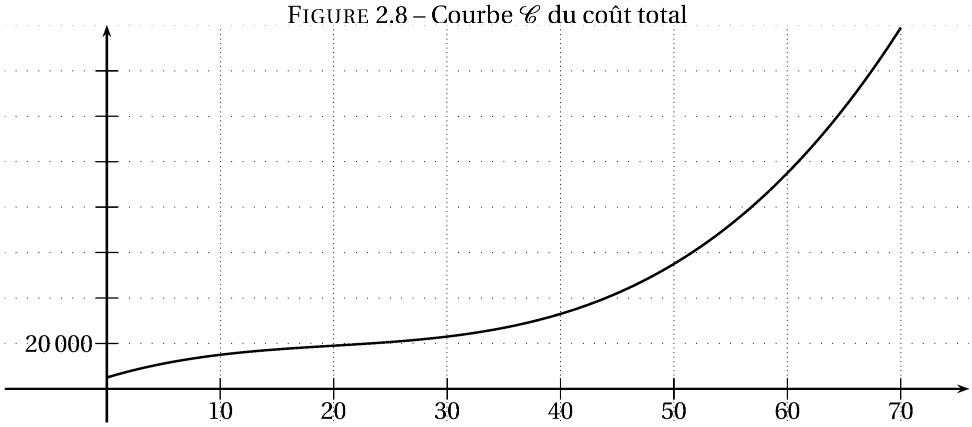
Une entreprise fabrique des objets et estime le coût total, en euros, de la production de $x$ objets en fonction de $x$ par :

$$C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000 \text{ pour } x \in [0;70]$$

**Partie A. Étude du coût total.**

1. Déterminer le montant en euros des coûts fixes.
2. Déterminer l'expression du coût marginal $C_m$ en fonction de $x$.
3. Déterminer les variations du coût total sur $[0;70]$.
4. On donne sur la figure 2.8 de la présente page la courbe $\mathscr{C}$ représentant $C_T$.
   Quelle semble être la convexité de $C_T$ ?

FIGURE 2.8 – Courbe $\mathscr{C}$ du coût total




**Partie B. Étude du coût marginal.**

1. Calculer la dérivée de $C_m$ en fonction de $x$.
2. Déterminer le sens de variation de $C_m$ sur l'intervalle $[0;70]$.

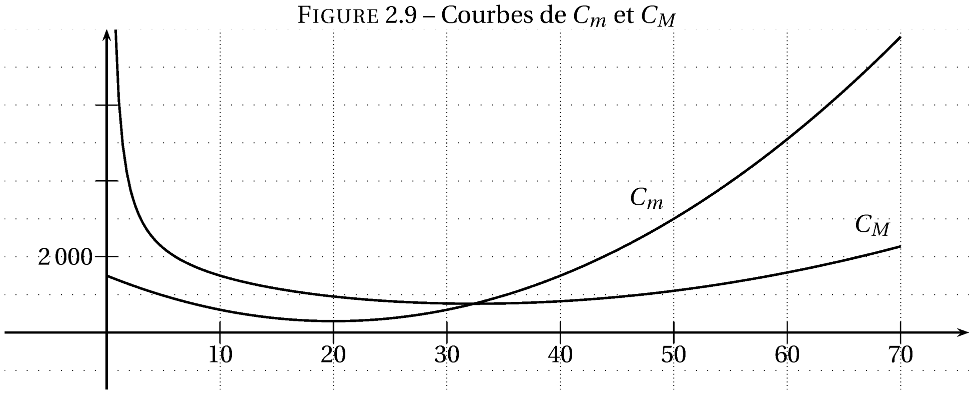
3. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
   Préciser l'abscisse de ce point.
4. (a) À partir de quelle quantité produite, chaque objet supplémentaire produit est-il plus coûteux que l'objet précédent ?
   (b) On appelle *rendement marginal* le rendement prévu pour la production d'un objet supplémentaire.
   Justifier l'affirmation suivante : « Pour une production de plus de 20 objets les rendements marginaux dans cette entreprise sont décroissants ».

**Partie C. Étude du coût moyen.**
Le coût moyen d'un objet lorsque $x$ objets sont produits est donné par

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} \text{ pour } x > 0$$

1. Quel est le coût moyen d'un objet pour 20 objets produits ?
2. Donner l'expression de $C_M(x)$.
3. (a) On note $A$ le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x$.
   Expliquer pourquoi $C_M(x)$ est le coefficient directeur de la droite $(OA)$ (où $O$ est l'origine du repère).
   (b) En déduire, par lecture graphique sur la courbe $\mathscr{C}$ qu'il existe un $x$ pour lequel $C_M(x)$ est minimal et donner la valeur de $x$ avec la précision permise par le graphique.
4. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit $f$ la fonction définie sur $]0; 70]$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 - 5000$.
   (a) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation en y indiquant les valeurs extrêmes.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [20; 70]$.
   (c) Donner un encadrement d'amplitude 1 de $\alpha$.
   (d) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
5. Recherche algébrique du minimum de $C_M(x)$.
   (a) Montrer que $C'_M(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ pour $x \in ]0; 70]$.
   (b) En déduire le signe de $C'_M(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (c) Dresser le tableau des variations de $C_M$.
   (d) En déduire un encadrement d'amplitude 1 de la valeur de $x$ pour laquelle $C_M(x)$ est minimal.
6. On a représenté les courbes de $C_m$ et de $C_M$ dans le repère de la figure 2.9 de la présente page.
   (a) Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de $x$ tel que $C_m(x) = C_M(x)$.
   (b) Résoudre algébriquement cette équation.

FIGURE 2.9 – Courbes de $C_m$ et $C_M$




7. On dit qu'une production se fait *à rendements d'échelle croissants* quand le coût moyen de production diminue, au fur et à mesure que la quantité produite augmente ; chaque unité produite entraîne alors un coût moins cher que l'unité précédente.
   Pour quelles productions d'objets peut-on dire alors que cette entreprise produit à rendements d'échelle croissants ?