7.1 Fonction dérivée

7.1.1 Activités

ACTIVITÉ 7.1 (Plusieurs nombres dérivés).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = 0$;
   - $a = 1$;
   - $a = 2$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ACTIVITÉ 7.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

7.1.2 Bilan et compléments

Définition 7.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de f*.

On admettra[1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 7.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée f'*	*définie sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

7.2 Opérations sur les fonctions

7.2.1 Activités

ACTIVITÉ 7.3 (Produit d'une fonction par une constante).
On pose $f(x) = x^2$, $g(x) = 3f(x) = 3x^3$ et $h(x) = \frac{f(x)}{4} = \frac{x^2}{4}$, toutes trois définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.
2. Que constate-t-on ?

ACTIVITÉ 7.4 (Fonction dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit de fonctions).
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. (a) Déterminer $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Que constate-t-on ?
2. (a) Montrer que $f(x) = g(x) \times h(x)$ où g et h sont deux fonctions non constantes à déterminer.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.
   (c) A-t-on $f'(x) = g'(x) \times h'(x)$?

1. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

7.2.2 Bilan et compléments

Plus généralement, on a :

Propriété 7.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku *avec* $k \in \mathbb{R}$	ku'	*Si* $f(x) = 4x^3$ *alors* $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	*Si* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *alors* $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	*Si* $f(x) = x\sqrt{x}$ *alors* $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ *avec* $x \neq 0$
$\dfrac{1}{v}$ *avec* $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	*Si* $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ *alors* $f'(x) = -\frac{6x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ *avec* $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	*Si* $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ *alors* $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.
En particulier, comme on l'a vu en activité, la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égale au produit (ou au quotient) des dérivées.

Preuve.

- Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

- Montrons que $(u + v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $u' + v'$

- Montrons que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a) - u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\dfrac{u(a) - u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\dfrac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\dfrac{1}{u^2(a)}$, donc $\dfrac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$

- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, donc $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = \dfrac{u'v}{v^2} - \dfrac{uv'}{v^2}$

- On admettra les autres propriétés.

◊

On admettra le résultat suivant :

Propriété 7.3. *Soit $f(x) = g(mx + p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx + p)$*

Exemple 7.1. Soit f définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.
On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.
Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.
Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

7.3 Applications de la fonction dérivée

7.3.1 Activités

ACTIVITÉ 7.5 (Variations d'une fonction).
Reprenons la fonction de l'activité 7.1 page 60 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f'.

ACTIVITÉ 7.6 (Extremum local).
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1, pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

7.3.2 Bilan et compléments

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.
On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 7.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 7.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)*

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 7.6. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra.
On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 7.6.

7.4 Exercices

7.4.1 Technique

EXERCICE 7.1.
Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

EXERCICE 7.2.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$ pour $x \neq \frac{7}{3}$
4. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
5. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 1\right)^5$
7. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

EXERCICE 7.3.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

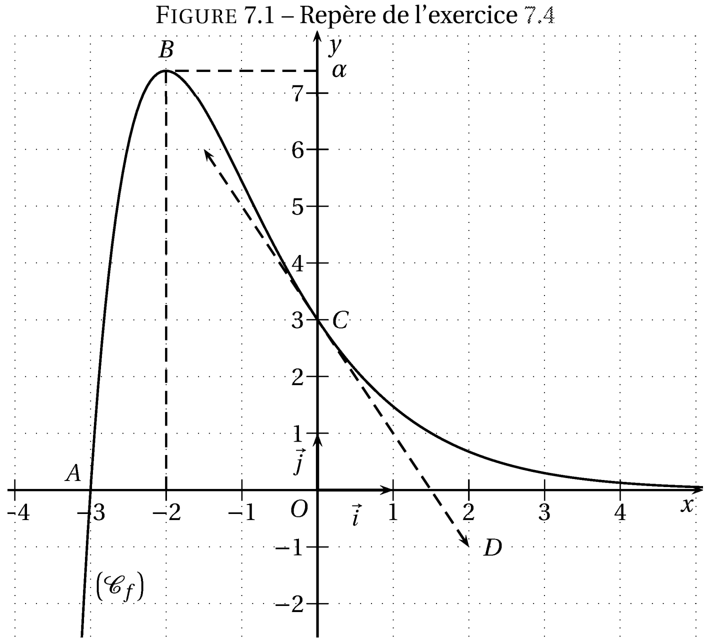
1. $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$
2. $f(x) = (x-1)^4(x+1)^4$
3. $f(x) = x^3\left(1 + \sqrt{x}\right)$
4. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
5. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)$
6. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

7.4.2 Lectures graphiques

EXERCICE 7.4.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la figure 7.1 de la présente page est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.
On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3\,;0)$, $B(-2\,;\alpha)$ où $\alpha \approx 7{,}39$ et $C(0\,;3)$ sont des points de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point C passe par le point $D(2\,;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

FIGURE 7.1 – Repère de l'exercice 7.4



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

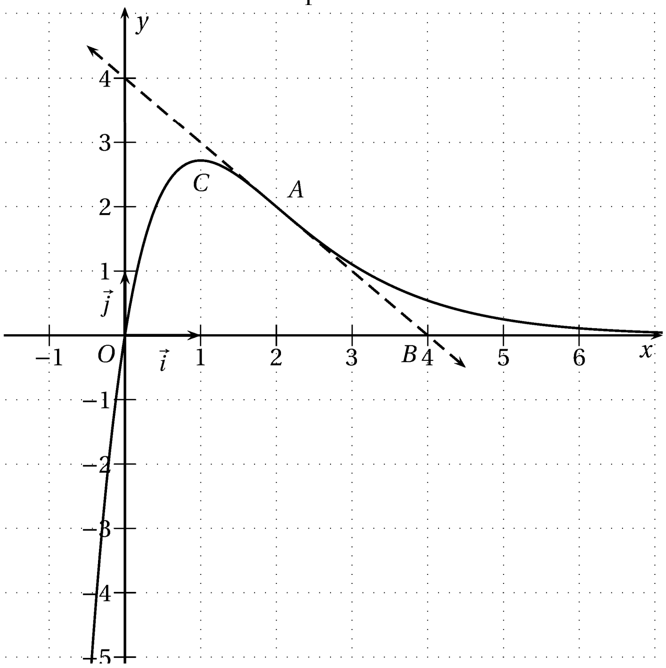
1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

EXERCICE 7.5.
On a représenté sur la figure 7.2 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

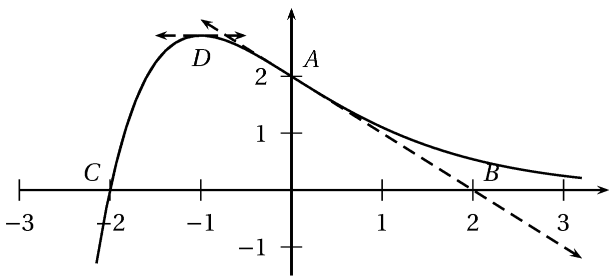
Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 7.2 – Repère de l'exercice 7.5

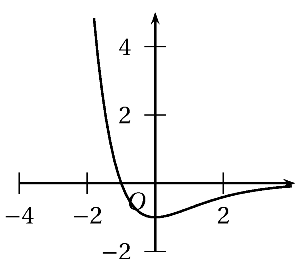


EXERCICE 7.6.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0~;~2)$ et $C(-2~;~0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

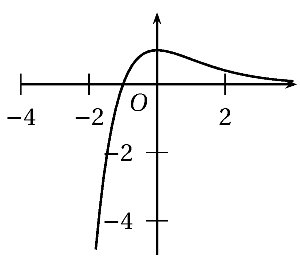
1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à Ia fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

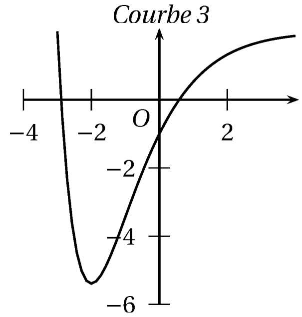
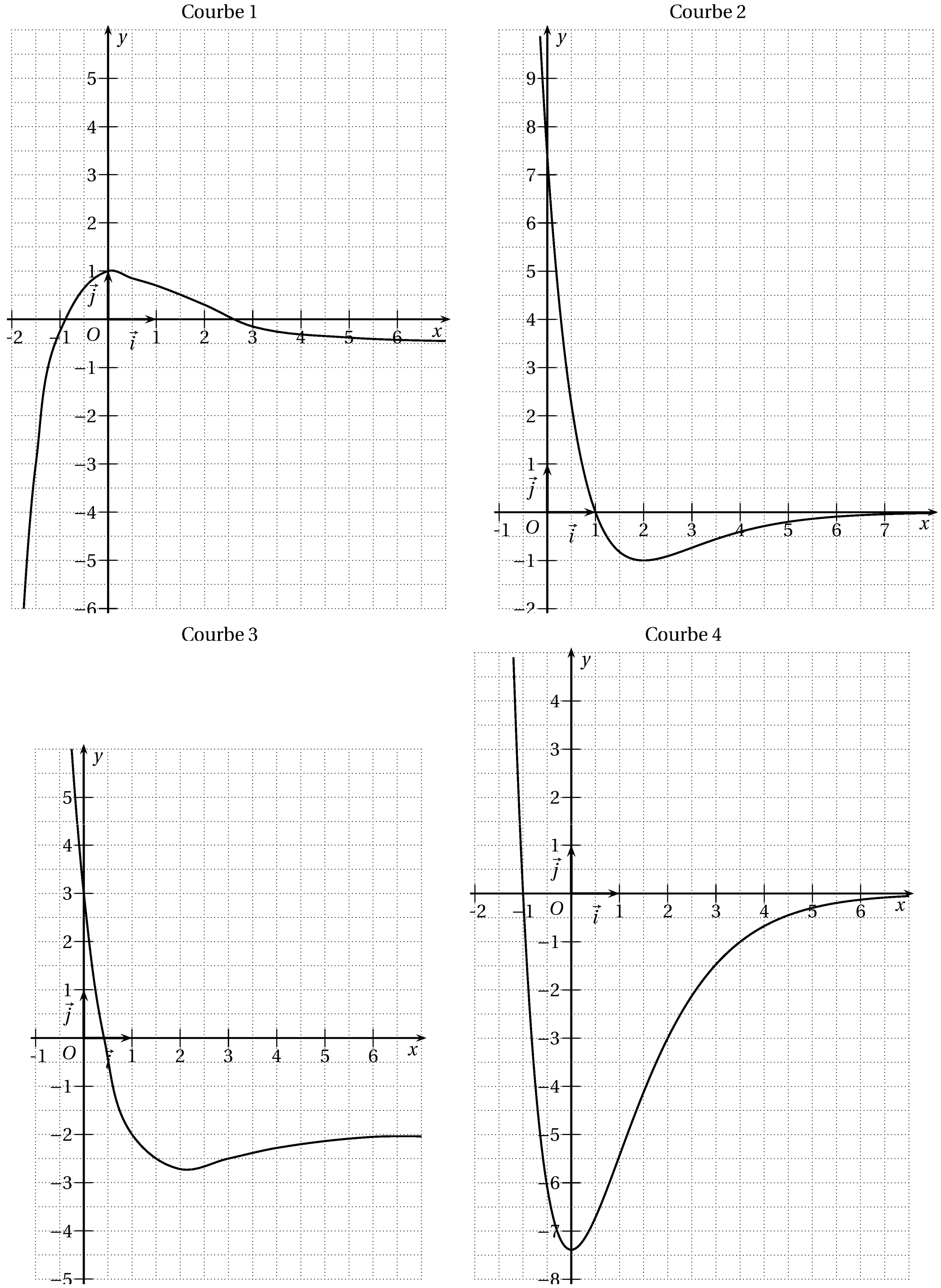


FIGURE 7.3 – Courbes de l'exercice 7.5



EXERCICE 7.7.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 de la présente page représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

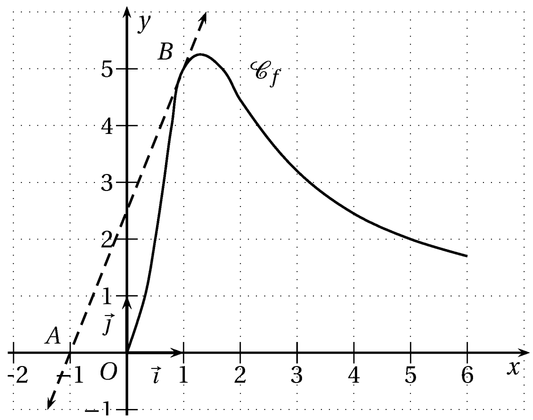


FIGURE 7.4 – Courbes de l'exercice 7.7

Figure 1

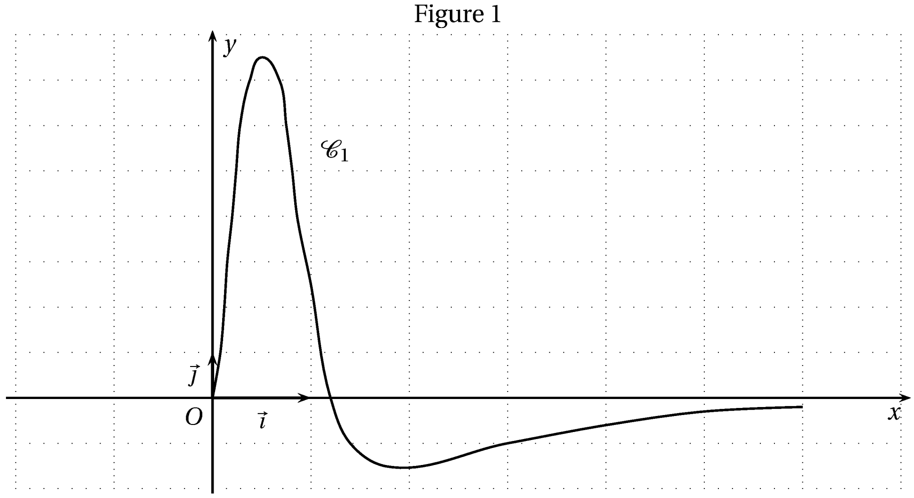


Figure 2

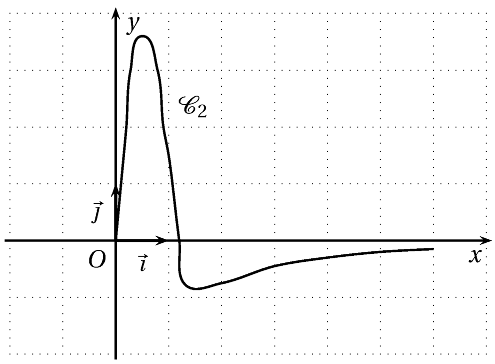
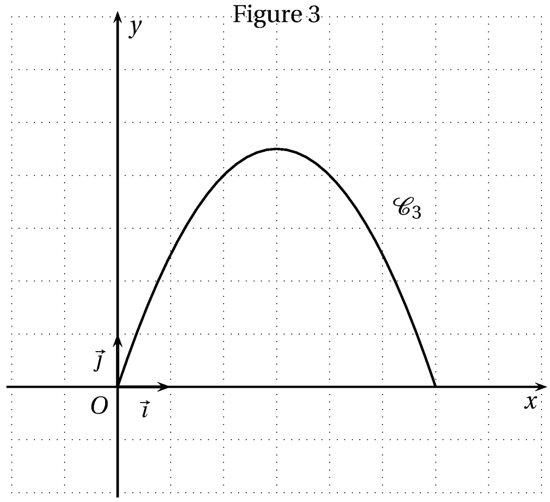


Figure 3



7.4.3 Études de fonctions

EXERCICE 7.8.
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

EXERCICE 7.9.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 7.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.11.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE 7.12.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.13.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.14.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

EXERCICE 7.15.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.16.
Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
4. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

EXERCICE 7.17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

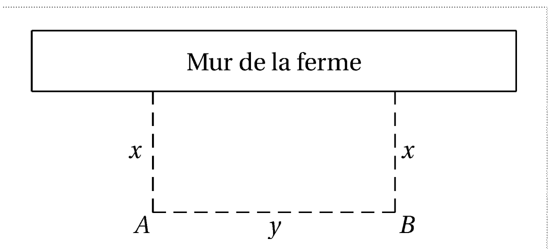
7.4.4 Problèmes

PROBLÈME 7.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

PROBLÈME 7.2.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

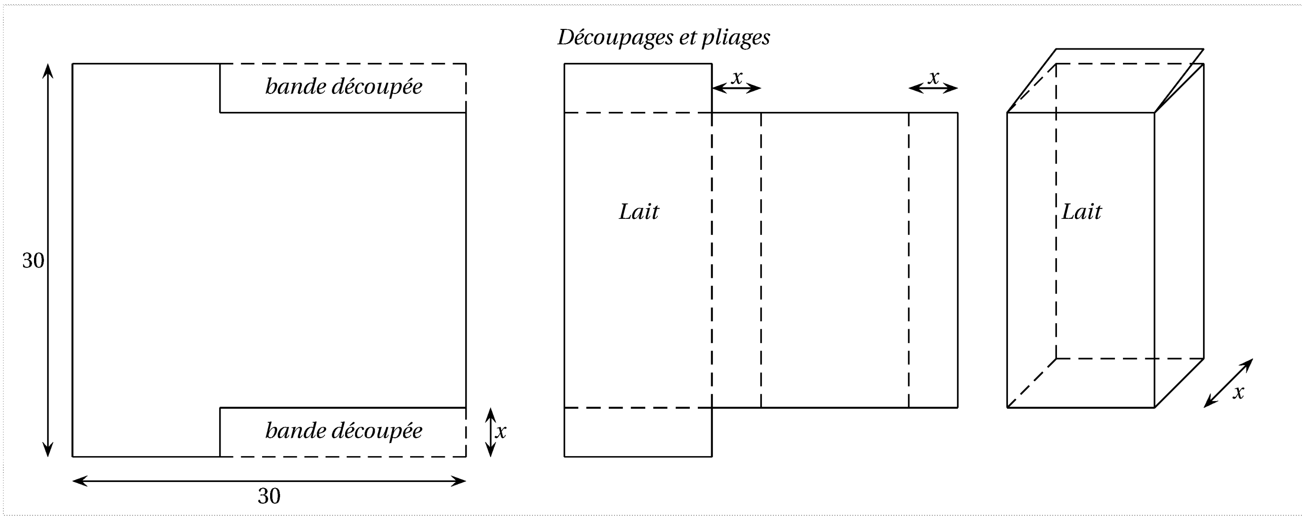
1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



PROBLÈME 7.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

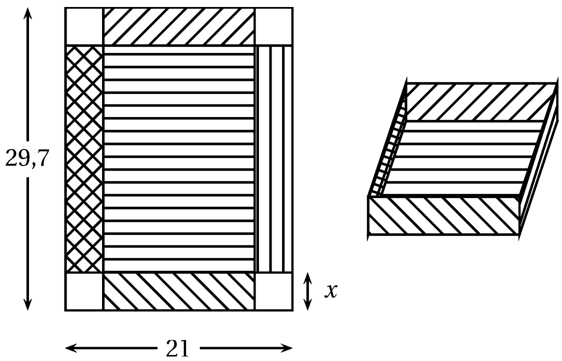
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.

2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



PROBLÈME 7.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



PROBLÈME 7.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

PROBLÈME 7.6.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

PROBLÈME 7.7.
Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une équation du type : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME 7.8.
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
   (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0;120]$.
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
   (d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.
   En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.
   (e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.
2. Courbe représentative de la fonction B
   (a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B.
   (b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

PROBLÈME 7.9.
Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, etc.), d'autre part, les coûts variables (ingrédients, salaires, etc.) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.
On estime que la fonction de coût total de cette entreprise est donnée par la fonction suivante :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$$

où q est le nombre de lots fabriqués et $C(q)$ est exprimé en dizaine d'euros.

1. Études du coût marginal et du coût total.
   Le coût marginal, noté $C_m(q)$ est, pour une quantité q donnée, l'augmentation du coût occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Sa valeur exacte est donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ mais dans la pratique on prend la valeur approchée $C_m(q) = C'(q)$, la différence entre les deux valeurs étant négligeable.
   (a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[1;8]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C' sur l'intervalle $[1;8]$.
   (c) Représenter graphiquement, dans le même repère, les fonctions C et C' (unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées).
2. Étude du coût moyen.
   Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$.
   On a donc $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.
   (a) Une fonction auxiliaire
   Soit $D(q)$ la fonction définie sur $[1;8]$ par $D(q) = q^3 - 2q^2 - 20$
      i. Étudier les variations de $D(q)$ puis dresser son tableau de variations.
      ii. En déduire que l'équation $D(q) = 0$ admet une unique solution q_0 dans $[1;8]$.
      iii. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de q_0 au dixième.
   (b) Expliquer pourquoi l'entreprise à tout intérêt à produire une quantité telle que $C_M(q)$ soit minimale.
   (c) Montrer que $C'_M(q) = \frac{q^3 - 2q^2 - 20}{q^2}$
   (d) Dresser le tableau des variations de C_M
   (e) En déduire la production optimale de l'entreprise.
   (f) i. Représenter C_M dans le même graphique que C et C_m.
      ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de C_M et C_m.
      Que constate-t-on ? *Cette propriété est toujours vraie.*

3. Concurrence parfaite.
   Dans cette partie on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché.
   Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 €la pizza.
   (a) Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas.
   Quelle est la recette $R(q)$, en dizaines d'euros, pour q lots vendus ?
   (b) Sur le même graphique que précédemment, tracer la droite d'équation $y = 30$.
   (c) « Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise a intérêt à produire. »
   Expliquer pourquoi.
   (d) Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q) = R(q) - C(q)$.
   Étudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?

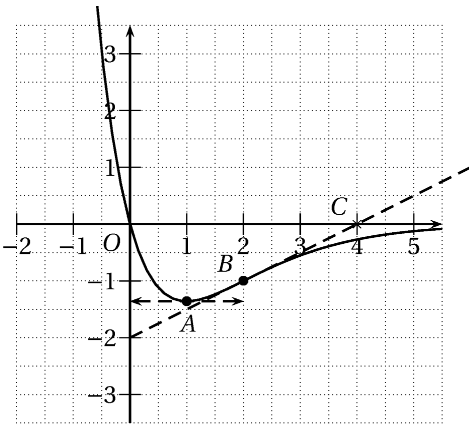
Devoir surveillé n°7

Fonction dérivée

EXERCICE 7.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

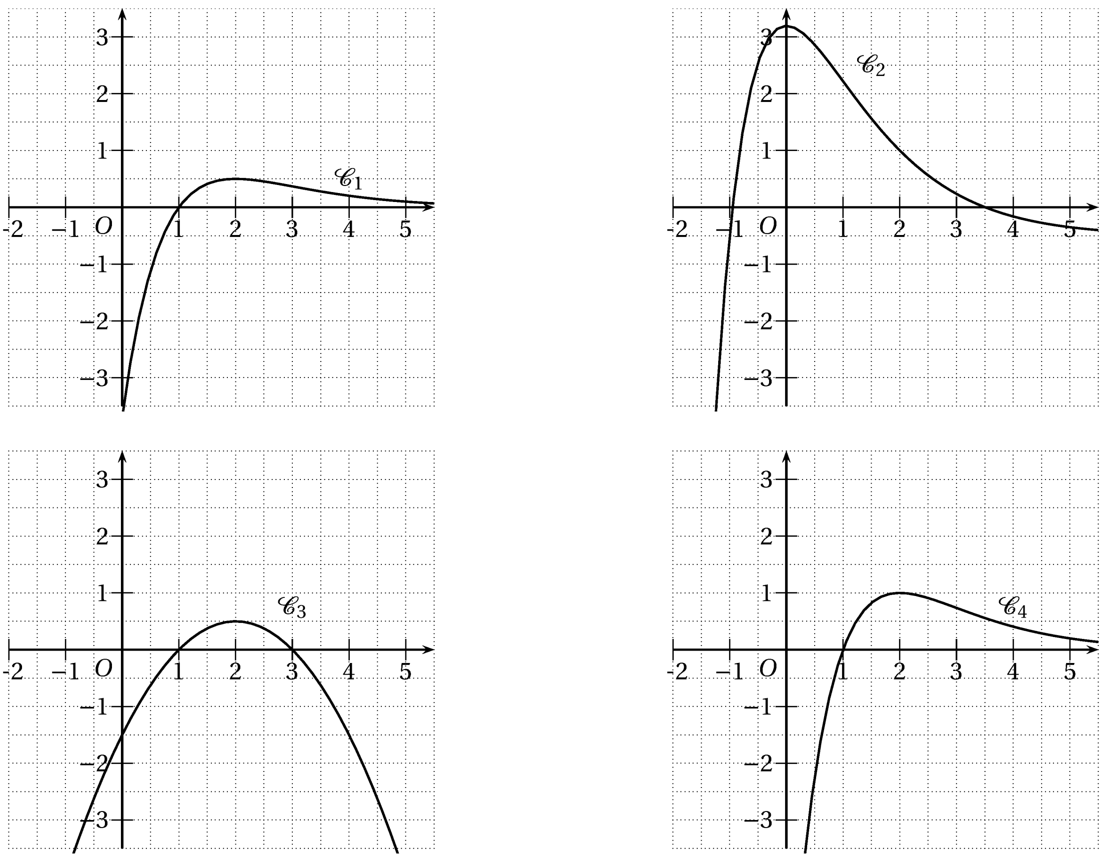
- $f(x) = x\sqrt{x}$
- $g(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 2$
- $h(x) = \frac{2x+1}{-x+5}$

EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :



- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2\,;-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4\,;0)$;

1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.
3. Une des représentations graphiques ci-dessous représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction h.



EXERCICE 7.3 (4 points).

Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0{,}001x^3 + 0{,}078x^2 + 205{,}9x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 250x$.
On suppose que chaque porte est vendue.
La fonction $B(x)$ est le bénéfice, en euros, obtenu par la vente de x portes

1. Montrer que $B(x) = -0{,}001x^3 - 0{,}078x^2 + 44{,}1x - 1500$.
2. Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal et quel est alors ce bénéfice ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 7.4 (8 points).

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe de la présente page un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.
   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.4