Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

L3 AES−MISASHS
Statistique-Inférence - 3AEX4
Contrôle continu du 19 octobre 2011

NOM PRÉNOM :
N° Carte d'étudiant :
Signature :

- **Durée** : 1h30. Calculatrice autorisée. Téléphone portable interdit.

<u>Exercice 1</u>: On a observé n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et n variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ suivant une même loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$, où les 2 paramètres μ et σ^2 sont inconnus. De plus les variables Y_i sont supposées indépendantes des variables X_i.
A partir de ces variables aléatoires, on construit 3 estimateurs T_1, T_2 et T_3 du paramètre μ :

- $T_1 = \overline{X} + \frac{\overline{Y}}{n}$
- $T_2 = 2\overline{X}$
- $T_3 = X_1$

1. Donner les espérances de ces 3 estimateurs.

2. Donner les variances de ces 3 estimateurs.

3. Y a-t-il un estimateur sans biais de μ? Si oui, lequel?

4. Y a-t-il un estimateur dont le biais (rappel: le biais est la différence entre l'espérance de l'estimateur et le paramètre à estimer) diminue avec le nombre des observations n? Si oui, lequel?

5. Indiquer le (ou les) estimateur(s) dont la variance diminue avec le nombre des observations n.

6. On souhaite conserver un seul estimateur. Lequel choisiriez-vous? Pourquoi?

Exercice 2: Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où λ est un paramètre inconnu.
On rappelle que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

1. Rappeler l'expression de $\mathbb{E}(\overline{X})$ et $\mathrm{Var}(\overline{X})$.

2. Donner un estimateur de λ puis deux estimateurs sans biais de $\mathrm{Var}(X)$.

3. Donner l'expression d'un intervalle de confiance du paramètre λ (de probabilité $1-\alpha$) prenant en compte la loi des X_i.

On a observé les 20 observations suivantes issues d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où λ est un paramètre inconnu :

$$2\ 2\ 3\ 8\ 2\ 2\ 6\ 2\ 1\ 4\ 5\ 7\ 4\ 2\ 1\ 4\ 1\ 6\ 4\ 5$$

4. A partir de ces observations, donner une estimation du paramètre λ et deux estimations de la variance $\mathrm{Var}(X)$.

5. Afin de construire un intervalle de confiance de probabilité 98%, donner la valeur du quantile $l_{\alpha/2}$ (d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$).

6. Calculer alors les bornes de l'intervalle de confiance du paramètre λ, de probabilité 98%.

Exercice 3: Dans un lycée, la probabilité de fumer régulièrement est de 0.35. Pour un échantillon de 250 lycéens, on note NF le nombre de fumeurs réguliers (parmi les 250 lycéens).

1. Quelle est la loi "exacte" de NF?

2. Calculer l'espérance et la variance de NF.

3. Donner l'expression de la variable "NF centrée-réduite".

4. Donner la loi "approchée" de "NF centrée-réduite". Quel théorème avez-vous utilisé?

5. Donner l'expression d'un intervalle de dispersion de NF de probabilité $1 - \alpha$.

6. Calculer les bornes de l'intervalle de dispersion de NF pour $\alpha = 3\%$.

EXTRAIT DE LA TABLE DE LA LOI NORMALE $\mathcal{N}(0,1)$

P		+0.001	+0.002	+0.003	+0.004	+0.005	+0.006	+0.007	+0.008	+0.009
0	Inf	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.0100	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.0200	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.0300	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.0400	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.0500	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.0600	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.0700	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.0800	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.0900	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.1000	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319