Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

PSYCHOLOGIE - Licence 3

E54XP1

Statistique pour la psychologie L3S5

Examen du 17 décembre 2008

CORRIGÉ

Exercice 1 :
Soit X la variable aléatoire "temps de séjour dans le Polygone"
$X \sim \mathcal{N}(150, \sigma = 60)$ et $U = \dfrac{X-150}{60} \sim \mathcal{N}(0,1)$

1) $$\begin{aligned} P(X > 180) &= P(\frac{X-150}{60} > \frac{1}{2}) \\ &= P(U > \frac{1}{2}) \\ &= 0.3085 \end{aligned}$$

2) $P(150 < X < 180) = 0.5 - 0.3085 = 0.1915$

3) On cherche t_{max} tel que $P(X < t_{max}) = 0.3$
Donc $P(U < \dfrac{t_{max}-150}{60}) = 0.3$
D'où $\dfrac{t_{max}-150}{60} = -0.5244$
$t_{max} = 150 - 0.5244 \times 60 = 118.5$

4) $P_{X>150}(X < 180) = \dfrac{P(150 < X < 180)}{P(X > 150)} = \dfrac{0.1915}{0.5} = 0.383$

5) $P_{X<180}(X > 150) = \dfrac{P(150 < X < 180)}{P(X < 180)} = \dfrac{0.1915}{0.6915} = 0.2769$

Exercice 2 :
1) On définit les événements :
A : "réaliser un achat au Polygone"
H : "être un homme"
F : "être une femme" - $F = \overline{H}$

Alors $P_H(A) = 0.8$ $\quad P(H) = 0.3$
$P_F(A) = 0.6$ $\quad P(F) = 0.7$

2) H et F formant une partition, le théorème des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(A) &= (P_H(A) \times P(H)) + (P_F(A) \times P(F)) \\ &= (0.8 \times 0.3) + (0.6 \times 0.7) \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

3) D'après le théorème de Bayes :

$$P_A(H) = \frac{P_H(A) \times P(H)}{P(A)} \quad \frac{0.8 \times 0.3}{0.66} = 0.3636$$

$$P_A(F) = \frac{P_F(A) \times P(F)}{P(A)} \quad \frac{0.6 \times 0.7}{0.66} = 0.6363$$

Un personne ayant réalisé un achat est plus vraisemblablement une femme.

Exercice 3 : Soit N l'événement "croiser le Père Noël au Polygone" - $P(N) = \frac{1}{4} = 0.25$

Partie 1 : Un client s'y rend 5 fois au total et il compte le nombre de fois où il a croisé le Père Noël.

1) Chaque visite au Polygone est une répétition d'une expérience aléatoire. Il s'y rend 5 fois donc 5 répétitions. À la visite i ($i = 1, .., 5$), on définit :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le client croise le Père Noël} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$X_i \sim \mathcal{B}er(\frac{1}{4})$ et sont indépendantes entre elles.

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ donc $X \sim \mathcal{B}in(5; \frac{1}{4})$

2) $P(X = 2) = C_5^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{3}{4})^3 = 10 \times \frac{3^3}{4^5} = 0.2637$

3) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (\frac{3}{4})^5 - 5 \times \frac{3^4}{4^5} = 0.3672$

3)
$$E(X) = 5 \times \frac{1}{4} = 1.25$$
$$V(X) = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0.9375$$

4) La loi des grands nombres nous dit que sur 1000 clients, la moyenne du nombre de fois où on croise le Père Noël se rapproche de l'espérance 1.25.

Partie 2 : Un client, "accro" du Père Noël, s'y rend jusqu'à temps de le rencontrer. Il compte alors le nombre de fois où il a dû se rendre au Polygone.

1) $X \sim \mathcal{G}eom(\frac{1}{4})$

2) S'il se déplace 3 fois, c'est qu'il n'a pas rencontré le Père Noël les 2 premières fois mais il le rencontre la 3ème fois :

$P(X = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 0.1406$

3) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{1}{4} - (\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}) = 0.5625$

4) D'après la loi des grands nombres, la moyenne du nombre de déplacements sur 1000 clients adoptant cette stratégie devrait se rapprocher de $E(X) = 4$.

Partie 3 : Un client s'y rend jusqu'à temps de rencontrer le Père Noël mais il n'ira pas plus de 4 fois. Il compte alors le nombre de fois où il a dû se rendre au Polygone.

1) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ puisqu'à la 4ème fois, il s'arrête de toute façon.

2)

v	1	2	3	4
$P(X=v)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$	$(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}$	$(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{4}+(\frac{3}{4})^4$
	0.25	0.1875	0.1406	0.4219

puisque "X=4" est équivalent à soit il a rencontré le Père Noël à la 4ème visite, soit il ne l'a jamais vu.

3) $E(X) = 2.7344$: la moyenne du nombre de déplacement de 1000 clients devrait se rapprocher de 2.7344.

Exercice 4 : Soit X, la variable aléatoire désignant le montant d'un achat. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
Alors l'énoncé donne $ID(\overline{X}) = [57.34\ ;\ 62.66]$.

1) $E(\overline{X}) = \mu$ donc l'intervalle de dispersion pour la moyenne étant centré sur son espérance, μ est donc le milieu de l'intervalle annoncé : $\mu = 60$

2)$Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{200} = \dfrac{400}{200} = 2$
$\overline{X}$ est donc une variable aléatoire de loi normale d'espérance 60 et de variance 2 (écart-type 1.414).

3) Pour $\alpha = 0.06$, $l_{\alpha/2} = 1.8808$
d'où $ID_{94\%}(\overline{X}) = [60 - 1.8808 \times \sqrt{2}\ ;\ 60 + 1.8808 \times \sqrt{2}] = [57.34\ ;\ 62.66]$

Pour $\alpha = 0.10$, $l_{\alpha/2} = 1.6449$
d'où $ID_{90\%}(\overline{X}) = [60 - 1.6449 \times \sqrt{2}\ ;\ 60 + 1.6449 \times \sqrt{2}] = [57.67\ ;\ 62.33]$

Le risque utilisé initialement était donc 6%.

4) La distribution est dissymétrique. On ne peut donc pas s'appuyer sur l'hypothèse de distribution normale pour le montant d'un seul achat et ne connaissant pas la loi, on ne peut construire d'intervalle de dispersion.

5) Soit S, le montant total des 200 achats.
$E(S) = 200 \times 60 = 12000$
$Var(S) = 200 \times 400 = 80000$

6) Soit X' le montant d'un achat de ces nouveaux clients : $X' = 0.9 \times X - 2$

$$\text{Alors}\quad \begin{aligned} E(X') &= 0.9 \times 60 - 2 = 52 \\ V(X') &= 0.9^2 \times 400 = 324 \end{aligned}$$

$$\text{Et}\quad \begin{aligned} E(\overline{X'}) &= 52 \\ V(\overline{X'}) &= \frac{324}{200} = 1.62 \end{aligned}$$

Ainsi : $ID_{94\%}(\overline{X'}) = [52 - 1.8808 \times \sqrt{1.62}\ ;\ 52 + 1.8808 \times \sqrt{1.62}] = [49.61\ ;\ 54.39]$