PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

E54XP1

Statistique pour la psychologie L3S5

Examen du 16 décembre 2010

CORRIGÉ

Partie 1 :
Soit X la variable aléatoire "vitesse d'un nageur en ligne 3"
$X \sim \mathcal{N}(3; \sigma = 0.5)$
On définit la variable centrée réduite : $U = \dfrac{X-3}{0.5} \sim \mathcal{N}(0,1)$

1. $$\begin{aligned} P(X > 3.8) &= P(\frac{X-3}{0.5} > \frac{0.8}{0.5}) \\ &= P(U > 1.6) \\ &= 0.0548 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(X < 2.5) &= P(\frac{X-3}{0.5} < -\frac{0.5}{0.5}) \\ &= P(U < -1) \\ &= P(U > 1) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} P_{X>2.5}(X > 3.8) &= \frac{P(X > 3.8 \cap X > 2.5)}{P(X > 2.5)} \\ &= \frac{P(X > 3.8)}{P(X > 2.5)} \\ &= \frac{0.0548}{0.8413} \\ &= 0.0651 \end{aligned}$$
   La probabilité de nager à plus de 3.8 kms/h est plus élevée parmi ceux qui nagent à plus de 2.5 kms/h que parmi tous les nageurs : $0.0651 > 0.0548$

4. On cherche un intervalle centré sur l'espérance (3 kms/h) avec un risque $\alpha = 0.2$. Donc $\alpha/2 = 0.1$ et $l_{\alpha/2} = 1.2816$.
   $P(3 - a < X < 3 + a) = 0.8 = P(-\dfrac{a}{0.5} < U < \dfrac{a}{0.5})$
   Donc $\dfrac{a}{0.5} = l_{\alpha/2} = 1.2816$ d'où $a = 0.5 * 1.2816 = 0.6408$

$ID_{80\%}(X) = [2.3592; 3.6408]$
C'est l'intervalle de dispersion à 80% pour les valeurs de X.

5. $P(X < 3) = P(X > 3) = 0.5$ donc la séparation entre les 2 groupes équiprobables se fera à partir de la vitesse : 3 kms/h. C'est la valeur de la médiane) : 50% des nageurs sont plus lents que 3 kms/h et 50% plus rapides que 3 kms/h.

6. $$\begin{aligned} P_{X>3}(X > 3.8) &= \frac{P(X > 3.8 \cap X > 3)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{P(X > 3.8)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{0.0548}{0.5} \\ &= 0.1096 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} P_{X>3}(X < 2.5) &= \frac{P(X < 2.5 \cap X > 3)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{P(\Phi)}{P(X > 3)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Partie 2 :

8. On définit les événements :
$L1$: "nager en ligne 1"
$L2$: "nager en ligne 2"
$L3$: "nager en ligne 3"
Pa : "nager avec palmes"

Alors $$\begin{aligned} P(L1) &= 0.4 \\ P(L2) &= 0.3 \\ P(L3) &= 0.3 \end{aligned}$$

Et $$\begin{aligned} P_{L1}(Pa) &= 0.4 \\ P_{L2}(Pa) &= 0.3 \\ P_{L3}(Pa) &= 0.6 \end{aligned}$$

9. $L1, L2, L3$ forment une partition de Ω.
Avec la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(Pa) &= P_{L1}(Pa) \times P(L1) + P_{L2}(Pa) \times P(L2) + P_{L3}(Pa) \times P(L3) \\ &= (0.4 \times 0.4) + (0.3 \times 0.3) + (0.3 \times 0.6) \\ &= 0.43 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} P_{Pa}(L3) &= \frac{P_{L3}(Pa) \times P(L3)}{P(Pa)} = \frac{0.6 \times 0.3}{0.43} = \frac{0.18}{0.43} \\ P_{Pa}(L2) &= \frac{P_{L2}(Pa) \times P(L2)}{P(Pa)} = \frac{0.3 \times 0.3}{0.43} = \frac{0.09}{0.43} \\ P_{Pa}(L1) &= \frac{P_{L1}(Pa) \times P(L1)}{P(Pa)} = \frac{0.4 \times 0.4}{0.43} = \frac{0.16}{0.43} \end{aligned}$$

Partie 3 :

11. Dans l'analogie avec le diagnostic médical :
M : "Nager avec des palmes"
T : "nager à une vitesse supérieure à 3.8 kms/h"
Alors
- la prévalence : $P(M)$, c'est la probabilité de nager avec des palmes
- la sensibilité : $P_M(T) = P_{Pa}(V > 3.8)$, c'est la probabilité de nager à plus de 3.8 kms/h quand on a des palmes
- la spécificité : $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = P_{\bar{P}a}(V < 3.8)$, c'est la probabilité de nager à moins de 3.8 kms/h quand on n'a pas de palmes

12. $P(Pa) = 0.43$ (partie 2)

13. On nous dit que :
$$\begin{aligned} P_M(T) &= 0.8 \\ P_{\bar{M}}(T) &= 0.1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad VPP = P_T(M) &= \frac{P_M(T) \times P(M)}{P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}}(T) \times P(\bar{M})} \\ &= \frac{0.8 \times 0.43}{0.8 \times 0.43 + 0.1 \times 0.57} \\ &= \frac{0.344}{0.344 + 0.057} \\ &= 0.8579 \end{aligned}$$

Partie 4 :

14. Soit X_i : v.a. "le nageur n°i nage avec palmes" :
$X_i = 1$ s'il nage avec palmes
$X_i = 0$ s'il nage sans palmes
$\forall i \in \{1, ..10\} X_i \sim \mathcal{B}er(0.2)$
Ces variables X_i sont indépendantes les unes des autres.
$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$
Donc $X \sim \mathcal{B}in(10, 0.2)$.

15. $P(X = 3) = C_{10}^{3} 0.2^3 0.8^7 = 120 \times 0.2^3 \times 0.8^7 = 0.2013$.

16. $E(X) = n \times 0.2 = 6$ d'où $n = \dfrac{6}{0.2} = 30$

17. Soit N : v.a. "nombre de nageurs pour voir le premier avec palmes"
$N \sim \mathcal{G}eom(0.2)$
$E(N) = \dfrac{1}{0.2} = 5$