PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

E55XP3

Statistique pour la psychologie L3S5

Examen du 15 décembre 2011

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1. Soit X la variable aléatoire "temps de préparation" : $X \sim \mathcal{N}(60, \sigma = 15)$
   $U = \dfrac{X - 60}{15} \sim \mathcal{N}(0, \sigma = 1)$
   $$\begin{aligned} P(X > 90) &= P(U > \frac{90 - 60}{15}) \\ &= P(U > 2) = 0.023 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(X > 45) &= P(U > \frac{45 - 60}{15}) \\ &= P(U > -1) \\ &= 1 - P(U > 1) = 1 - 0.159 = 0.841 \end{aligned}$$

3. $P(X < d_{min}) = 0.10$
   Donc $P(U < \dfrac{d_{min} - 60}{15}) = 0.10$
   On note $u = \dfrac{d_{min} - 60}{15}$: $u = -1.2816$.
   Alors $\dfrac{d_{min} - 60}{15} = -1.2816$, d'où $d_{min} = 60 - 1.2816 \times 15 = 40.78$.
   Les individus les plus rapides mettent moins de 40.78 minutes à se préparer.

4. Par symétrie de la distribution de X autour de l'espérance :
   $d_{max} = 60 + (60 - 40.78) = 79.22$
   Les individus les plus lents mettent plus de 79.22 minutes à se préparer.

5. Ainsi $P([d_{min}; d_{max}]) = 0.8$.

6. Par symétrie de la distribution de X, la durée qui sépare les 50% des plus lents des 50% les plus rapides correspond à l'espérance : 60 minutes. On la nomme aussi médiane.

7. $P_{X>60}(X > 90) = \dfrac{P(X > 90 \cap X > 60)}{P(X > 60)} = \dfrac{P(X > 90)}{P(X > 60)} = \dfrac{0.023}{0.5} = 0.046$

8. $P_{X<60}(X > 45) = \dfrac{P(X > 45 \cap X < 60)}{P(X < 60)} = \dfrac{P(45 < X < 60)}{P(X < 60)} = \dfrac{0.841 - 0.5}{0.5} = 0.682$

Exercice 2 :

9. On note les événements :
H : "être un homme"
F : "être une femme" - $F = \bar{H}$
C : "utiliser des produits cosmétiques"
L : "faire partie du groupe des plus lents"

Alors
$$\begin{array}{lcl|lcl} P(H) & = & 0.45 & P(F) & = & 0.55 \\ P_F(C) & = & 0.8 & P_H(C) & = & 0.6 \\ P_{F\cap C}(L) & = & 0.9 & P_{H\cap C}(L) & = & 0.9 \end{array}$$

10.

11. H et F forment une partition de Ω. En utilisant le théorème des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(C) &= P(C\cap H) + P(C \cap F) \\ &= (P_H(C)\times P(H)) + (P_F(C)\times P(F)) \\ &= (0.6\times 0.45) + (0.8\times 0.55) = 0.71 \end{aligned}$$

12. En utilisant le théorème de Bayes :
$$\begin{aligned} P_C(H) &= \frac{P_H(C)\times P(H)}{P(C)} \\ &= \frac{0.6\times 0.45}{0.71} = 0.38 \end{aligned}$$
38% des utilisateurs de cosmétiques sont des hommes.

13. En utilisant le théorème de Bayes :
$$\begin{aligned} P_{\bar{C}}(F) &= \frac{P_F(\bar{C})\times P(F)}{P(\bar{C})} \\ &= \frac{0.2\times 0.55}{1-0.71} = 0.38 \end{aligned}$$
38% des non utilisateurs de cosmétiques sont des femmes.

Exercice 3 :

14. Soit A l'événement "4 personnes parmi les 6 interrogées utilisent des produits cosmétiques".
$P(A) = C_6^4 \times 0.7^4 \times 0.3^2 = 0.324$ avec $C_6^4 = 15$

15. Soit X la variable aléatoire "nombre d'utilisateurs de cosmétiques parmi 6 personnes interrogées" alors $X \sim \mathcal{B}in(6, 0.7)$.
Justification :
Pour la personne numéro i, on définit :
$$X_i = \begin{cases} 1 & = \text{ si la personne utilise des cosmétiques} \\ 0 & = \text{ si la personne n'utilise pas de cosmétique} \end{cases}$$
Alors $X_i \sim \mathcal{B}er(0.7)$. On suppose les X_i indépendantes entre elles.
Ainsi $X = X_1 + X_2 + ..X_6$ donc $X \sim \mathcal{B}in(6, 0.7)$.

16. Soit n la taille du groupe à interroger. $X \sim \mathcal{B}in(n, 0.7)$ et $E(X) = n\times 0.7 = 35$.
Alors $n = \dfrac{35}{0.7} = 50$

17. Y est un variable discrète. Sa loi est la loi géométrique : $Y \sim \mathcal{G}eom(0.7)$.

$$
\begin{aligned}
P(Y = 1) &= 0.7 \\
P(Y = 2) &= 0.3 \times 0.7 = 0.21 \\
P(Y = 3) &= 0.3^2 \times 0.7 = 0.063
\end{aligned}
$$