PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

E54XP1

Statistique pour la psychologie L3S5

Examen du 15 janvier 2011

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1. $$\begin{aligned} M_1 &= E \cap (V \cup P) \cap \bar{D} \\ M_2 &= \bar{E} \cap (V \cup P) \cap D \\ M_3 &= E \cap (V \cup P) \cap D \end{aligned}$$

2. $$\bar{M_3} = \bar{E} \cup (\bar{V} \cap \bar{P}) \cup \bar{D}$$

   Un repas ne rentrant pas dans le menu 3 est un repas ne contenant pas d'entrée (ou plusieurs) ou pas de dessert (ou plusieurs) ou encore ni viande, ni poisson (ou plusieurs de l'une ou l'autre) !!

3. Événements à définir : S :"être satisfait du repas" et C : "choisir à la carte".

   Alors $$\begin{aligned} P(M_1) &= 0.30 \\ P(M_2) &= 0.45 \\ P(M_3) &= 0.15 \\ P(C) &= 0.10 \end{aligned}$$

   Et $$\begin{aligned} P_{M_1}(S) &= 0.65 \\ P_{M_2}(S) &= 0.75 \\ P_{M_3}(S) &= 0.90 \\ P_C(S) &= 0.95 \end{aligned}$$

4. M_1, M_2, M_3, C forment une partition de Ω, en appliquant le théorème des probabilités totales :

   $$\begin{aligned} P(S) &= P_{M_1}(S) \times P(M_1) + P_{M_2}(S) \times P(M_2) + P_{M_3}(S) \times P(M_3) + P_C(S) \times P(C) \\ &= 0.65 \times 0.30 + 0.75 \times 0.45 + 0.90 \times 0.15 + 0.95 \times 0.10 \\ &= 0.7625 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} P_S(M_1) &= \frac{P_{M_1}(S) \times P(M_1)}{P(S)} &= \frac{0.65 \times 0.30}{0.7625} = 0.2557 \\ P_S(M_2) &= \frac{P_{M_2}(S) \times P(M_2)}{P(S)} &= \frac{0.75 \times 0.45}{0.7625} = 0.4426 \\ P_S(M_3) &= \frac{P_{M_3}(S) \times P(M_3)}{P(S)} &= \frac{0.90 \times 0.15}{0.7625} = 0.1770 \\ P_S(C) &= \frac{P_C(S) \times P(C)}{P(S)} &= \frac{0.95 \times 0.10}{0.7625} = 0.1246 \end{aligned}$$
   Le choix le plus probable d'une personne satisfaite est donc le menu 2. En effet de nombreux clients choisissent ce menu et c'est ce qui l'emporte.

6. Analogie : $T = S$ et $M = C$
   Alors $Se = P_M(T) = P_C(S) = 0.95$

7. $$\begin{aligned} Sp &= P_{\bar{M}}(\bar{T}) = P_{\bar{C}}(\bar{S}) \\ &= 1 - P_{\bar{C}}(S) = 1 - \frac{P_S(\bar{C}) \times P(S)}{P(\bar{C})} \\ &= 1 - \frac{P_S(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \times P(S)}{1 - P(C)} \\ &= 1 - \frac{(P_S(M_1) + P_S(M_2) + P_S(M_3)) \times P(S)}{1 - P(C)} \\ &= 1 - \frac{(0.2557 + 0.4426 + 0.1770) \times 0.7625}{0.90} \\ &= 0.2584 \end{aligned}$$

8. Soit X la variable aléatoire "nombre de convives choisissant le menu 2 sur une table de 10".
   Soit X_i : v.a. "le convive n°i choisit le menu 2" :
   $X_i = 1$ s'il choisit le menu 2
   $X_i = 0$ sinon
   $\forall i \in \{1, ..10\} X_i \sim \mathcal{B}er(0.45)$
   Ces variables X_i sont indépendantes les unes des autres.
   $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$
   Donc $X \sim \mathcal{B}in(10, 0.45)$.
   $P(X = 5) = C_{10}^5 \times 0.45^5 \times 0.55^5 = 252 \times 0.45^5 \times 0.55^5 = 0.2340$

9. Avec la loi binomiale : $E(X) = n \times p = 10 \times 0.45 = 4.5$.
   4.5 personnes en moyenne théorique choisissent le menu 2.

Exercice 2 :

10. $Y = E_2 - 5 \times E_1$

11. $E(Y) = E(E_2) - 5 \times E(E_1)$
    Or $E(E_1) = (0 \times 0.10) + (1 \times 0.22) + (2 \times 0.17) + (3 \times 0.31) + (4 \times 0.12) + (5 \times 0.08) = 2.37$
    Donc $E(Y) = 100 - (5 \times 2.37) = 88.15$

12. $V(Y) = V(E_2) + 25 \times V(E_1)$ d'après les régles sur la variance.
    L'hypothèse d'indépendance est peu rélaliste : quelqu'un faisant peu de fautes à l'épreuve

1 a de grandes chances d'avoir un bon score à l'épreuve 2 ... à moins que les 2 épreuves ne s'appuient volontairement pas sur les mêmes compétences (épreuves complémentaires).

Exercice 3 :

13. Soit X la variable aléatoire "pression du LCR" : $X \sim \mathcal{N}(7.5, \sigma = 2)$
$U = \dfrac{X - 7.5}{2} \sim \mathcal{N}(0, \sigma = 1)$
$$\begin{aligned} P(X > 6.5) &= P(U > \frac{6.5 - 7.5}{2}) \\ &= P(U > -0.5) \\ &= 1 - P(U > 0.5) = 1 - 0.309 = 0.691 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} P_{X<7.5}(X > 6.5) &= \frac{P(X > 6.5 \cap X < 7.5)}{P(X < 7.5)} \\ &= \frac{P(6.5 < X < 7.5)}{P(X < 7.5)} \\ &= \frac{0.691 - 0.5}{0.5} \\ &= 0.382 \end{aligned}$$

15. On cherche un intervalle centré sur l'espérance donc $P(7.5 - a < X < 7.5 + a) = 0.92$ avec $\alpha = 0.08$
Alors $P(-\frac{a}{2} < U < \frac{a}{2}) = 0.92$
Donc $\frac{a}{2} = l_{\alpha/2} = l_{0.04} = 1.7507$
D'où $a = 3.5014$
On en déduit : $ID_{0.92}(X) = [3.9986; 11.0014]$

16. Notons Y la variable aléatoire "pression du LCR en cas de tumeur" : $Y \sim \mathcal{N}(13, \sigma = 3)$
$U = \dfrac{X - 13}{3} \sim \mathcal{N}(0, \sigma = 1)$
$P(HTIC) = P(Y > 15) = P(U > \dfrac{15 - 13}{3}) = P(U > 0.6667) = 0.252$

17. $P_{Y>12}(Y > 15) = \dfrac{P(Y > 15 \cap Y > 12)}{P(Y > 12)} = \dfrac{P(Y > 15)}{P(U > -0.3333)} = \dfrac{0.252}{1 - 0.369} = 0.399$