Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

PSYCHOLOGIE - Licence 3

E54XP1

Statistique pour la psychologie L3S5

Examen du 12 janvier 2010

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1) On définit les événements :

A : "choisir le menu A"
B : "choisir le menu B"
C : "choisir le menu C"
D : "choisir le menu D"
V : "le menu contient des légumes verts"

2) Alors

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & 0.45 \\ P(B) & = & 0.10 \\ P(C) & = & 0.20 \\ P(D) & = & 0.25 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} P_A(V) & = & 0.05 \\ P_B(V) & = & 0.60 \\ P_C(V) & = & 0.50 \\ P_D(V) & = & 0.45 \end{array}$$

3) Théorème des probabilités totales avec A, B, C et D partition de Ω :

$$\begin{array}{rcl} P(V) & = & P_A(V) \times P(A) + P_B(V) \times P(B) + P_C(V) \times P(C) + P_D(V) \times P(D) \\ & = & 0.05 \times 0.45 + 0.60 \times 0.10 + 0.50 \times 0.20 + 0.45 \times 0.25 \\ & = & 0.295 \end{array}$$

4) Formule de Bayes :

$$P_{\overline{V}}(A) = \frac{P_A(\overline{V}) \times P(A)}{P(\overline{V})} = \frac{0.95 \times 0.45}{0.705} = 0.606$$

5) On calcule :

$$\begin{array}{rcl} P_V(A) & = & \dfrac{P_A(V) \times P(A)}{P(V)} = \dfrac{0.05 \times 0.45}{0.295} = 0.076 \\ P_V(B) & = & 0.203 \\ P_V(C) & = & 0.339 \\ P_V(D) & = & 0.381 \end{array}$$

Le menu le plus vraisemblablement choisi par un enfant ayant mangé des légumes verts est donc le D car c'est celui qui fait le meilleur résumé entre la probabilité de le choisir et le fait de manger des légumes verts dans ce menu.

Exercice 2 :
Soit X la variable aléatoire “score de performance d'un individu du groupe 1”
$X \sim \mathcal{N}(50, \sigma = 6)$ et $U = \dfrac{X-50}{6} \sim \mathcal{N}(0,1)$

6)
$$\begin{aligned} P(X < 43) &= P(\frac{X-50}{6} < -1.1667) \\ &= P(U < -1.1667) \\ &= P(U > 1.1667) \\ &= 0.122 \end{aligned}$$

7) On cherche f, la performance, telle que : $P(X < f) = 0.8$

$$\begin{aligned} P(X < f) = 0.8 &\iff P(U < \frac{f-50}{6}) = 0.8 \\ &\iff P(U > \frac{f-50}{6}) = 0.2 \\ &\iff \frac{f-50}{6} = 0.8416 \\ &\iff f = 55.05 \end{aligned}$$

On appelle cette valeur le quantile à 80%.

8) On cherche a tel que $P(50 - a < X < 50 + a) = 0.9$.

$$\begin{aligned} P(X > 50 + a) = 0.05 &\iff P(U > \frac{a}{6}) = 0.05 \\ &\iff \frac{a}{6} = 1.6449 \\ &\iff a = 9.8694 \end{aligned}$$

Donc

$$ID_{90\%} = [40.1306\ ;\ 59.8694]$$

9)

$$\begin{aligned} P_{X>50}(43 < X < 56) &= \frac{P('43 < X < 56' \cap 'X > 50')}{P(X > 50)} \\ &= \frac{P(50 < X < 56)}{P(X > 50)} \\ &= \frac{0.5 - P(X > 56)}{0.5} \\ &= \frac{0.5 - P(U > 1)}{0.5} = \frac{0.5 - 0.159}{0.5} = 0.682 \end{aligned}$$

Soit Y la variable aléatoire “score de performance d'un individu du groupe 2”
$Y \sim \mathcal{N}(70, \sigma = 7)$

10) Comme
$$\begin{aligned} E(2Y) &= 2 \times E(Y) = 140 \\ V(2Y) &= 2^2 \times V(Y) = 4 \times 49 = 196 \end{aligned}$$
Donc $2Y \sim \mathcal{N}(140, \sigma = 14)$

11) Comme
$$\begin{aligned} E(X_1+X_2+2Y) &= E(X_1)+E(X_2)+E(2Y) = 50+50+140 = 240 \\ V(X_1+X_2+2Y) &= V(X_1)+V(X_2)+V(2\times Y) = 36+36+196 = 268 \end{aligned}$$
car les variables sont indépendantes.
Donc $X_1+X_2+2Y \sim \mathcal{N}(240, \sigma = 16.3707)$

12) Comme
$$\begin{aligned} E(\frac{X_1+X_2+2Y}{4}) &= \frac{E(X_1+X_2+2Y)}{4} = \frac{240}{4} = 60 \\ V(\frac{X_1+X_2+2Y}{4}) &= \frac{V(X_1+X_2+2Y)}{4^2} = \frac{268}{16} = 16.75 \end{aligned}$$
Donc $M = \dfrac{X_1+X_2+2Y}{4} \sim \mathcal{N}(60, \sigma = 4.093)$

13) $M \sim \mathcal{N}(60, \sigma = 4.093)$ et $U = \dfrac{M-60}{4.093} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} P(M > 65) &= P(U > \frac{65-60}{4.093}) \\ &= P(U > 1.2216) = 0.111 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit A l'événement "avoir une fève" pour un enfant - $P(A) = \dfrac{1}{3} = 0.333$

14) Dans un groupe de 10 enfants, soit N la variable aléatoire qui compte le nombre d'enfants ayant obtenu une fève. On répète 10 fois l'observation d'un événement de probabilité 0.33.
Les valeurs possibles de N sont : $N(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, ..., 10\}$.
Pour l'enfant i ($i = 1, .., 10$), on note :
$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'enfant a eu une fève} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
$X_i \sim \mathcal{B}er(\dfrac{1}{3})$.
$N = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$ on peut alors suggérer $N \sim \mathcal{B}in(10; \dfrac{1}{3})$
$E(N) = 10 \times \dfrac{1}{3} = 3.333$
L'espérance est de 3.333 enfants qui obtiennent la fève dans un groupe de 10 enfants.

15) $P(N=4) = C_{10}^4 \times (\dfrac{1}{3})^4 \times (\dfrac{2}{3})^6 = 210 \times \dfrac{2^6}{3^{10}} = 0.2276$

16) L'enfant répète l'expérience jusqu'à ce qu'il obtienne une fève. On compte dans N, le nombre de parts mangées.
Les valeurs possibles de N sont : $N(\Omega) = \{1, 2, 3, ...\} = N^*$.
Alors $N \sim \mathcal{G}eom(\dfrac{1}{3})$.
$E(N) = \dfrac{1}{p} = 3$
L'espérance est de 3 parts de galettes mangées par l'enfant.

17) $P(N=4) = \dfrac{2}{3}^3 \dfrac{1}{3} = 0.0988$