PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

# E53XPM

## Statistiques appliquées à la psychologie 3

**Examen du 13 juin 2005**

## CORRIGÉ

---

**Exercice 1 :**

1) Notons les événements :

$B$ : "être à bas risque"
$M$ : "être à risque moyen"
$H$ : "être à haut risque"
$A$ : "être impliqué dans un accident au moins dans l'année"

Alors :

$P(B) = 0.2$ $\quad P(M) = 0.5$ $\quad P(H) = 0.3$

$P(A|B) = P_B(A) = 0.05$ $\quad P(A|M) = P_M(A) = 0.15$ $\quad P(A|H) = P_H(A) = 0.30$

2) $B$, $M$ et $H$ forment une partition de $\Omega$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \times P(B) + P(A|M) \times P(M) + P(A|H) \times P(H) \\ &= (0.05 \times 0.2) + (0.15 \times 0.5) + (0.30 \times 0.30) \\ &= 0.175 \end{aligned}$$

3) On cherche $P(B|\overline{A})$. Formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(B|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B) \times P(B)}{P(\overline{A})} \\ &= \frac{(1 - P(A|B)) \times P(B)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.2}{0.825} = 0.23 \end{aligned}$$

4) On calcule :

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A)} = 0.057 \\ P(M|A) &= \frac{P(A|M) \times P(M)}{P(A)} = 0.428 \\ P(H|A) &= \frac{P(A|H) \times P(H)}{P(A)} = 0.514 \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que Mr Durand a été impliqué dans un accident cette année, le plus probable est qu'il fasse partie de la classe à haut risque avec 51.4 % de chances.

**Exercice 2 :** Soit $X$ la v.a. associée au score du test passé par les individus. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(X \mid G_1) & \sim & \mathcal{N}(10, 3.5^2) \\ P(X \mid G_2) & \sim & \mathcal{N}(20, 1.5^2) \end{array}$$

Et soit $Z$ la variable centrée réduite associée : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

1) $P_1(X \geq 15) = P(X \geq 15 \mid G_1) = P(\dfrac{X-10}{3.5} \geq \dfrac{5}{3.5} \mid G_1) = P(Z \geq 1.4286) = 0.077$

2) $P_2(X \leq 15) = P(X \leq 15 \mid G_2) = P(\dfrac{X-20}{1.5} \leq -\dfrac{5}{3.5} \mid G_2) = P(Z \leq -3.3333) = 0.0001$

3) Le groupe 1 a tendance à avoir des scores plus faibles que le groupe 2. Par la règle définie, on affecte au groupe le plus probable. C'est-à-dire que si la probabilité d'obtenir un score plus élevé que $v$ dans le groupe 1 est plus grande que la probabilité d'obtenir un score plus faible que $v$ dans le groupe 2, alors l'individu est affecté au groupe 1. Inversement, il sera affecté au groupe 2.

4) $P_1(X \geq 17) = P(Z \geq 2) = 0.023$
et $P_2(X \leq 17) = P(Z \leq -2) = 0.023$
donc il y a équilibre de part et d'autre de 17.
De plus, $\forall v \leq 17 \quad P_1(X \geq v) \geq P_1(X \geq 17) \geq P_2(X \leq 17) \geq P_2(X \leq v)$
l'individu sera alors affecté à la classe 1.
De même, $\forall v \geq 17 \quad P_1(X \geq v) \leq P_1(X \geq 17) \leq P_2(X \leq 17) \leq P_2(X \leq v)$
l'individu sera alors affecté à la classe 2.

5) Probabilité pour qu'un individu du groupe 1 soit mal classé :
$P(X \geq 17 \mid G_1) = P_1(X \geq 17) = P(Z \geq 2) = 0.023$
De même, probabilité pour qu'un individu du groupe 2 soit mal classé :
$P(X \leq 17 \mid G_2) = P_2(X \leq 17) = P(Z \leq -2) = 0.023$

6)

$$\begin{array}{rcl} P(G_1 \mid X \geq 18) & = & \dfrac{P(X \geq 18 \mid G_1) \times P(G_1)}{P(X \geq 18)} \\ & = & \dfrac{P(X \geq 18 \mid G_1) \times P(G_1)}{P(X \geq 18 \mid G_1) \times P(G_1) + P(X \geq 18 \mid G_2) \times P(G_2)} \end{array}$$

**Exercice 3 :**
1) L'aléa associé au résultat de l'expérience est d'observer si oui ou non le temps de réflexion est plus long à 60m qu'à 30m. Notons $X_i$ la variable associée au résultat de l'individu $i$ :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si le temps mesuré est plus long à 60m qu'à 30m} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X_i$ est donc une variable aléatoire dichotomique indiquant si la narcose au nitrogène a un effet ($X_i = 1$) ou non ($X_i = 0$).
(Remarque : on ne retient pas ici la mesure des 2 temps de réflexion à 60m et à 30m mais on s'intéresse seulement à observer si le premier a été plus long que le deuxième ou non.)

2) Cette variable aléatoire dichotomique est naturellement modélisée par une loi de Bernoulli. Si la narcose au nitrogène n'a pas d'effet, il y a autant de chances que le temps de réflexion à 60m soit plus long qu'à 30m que l'inverse. Autrement dit le paramètre de cette loi : $p = P(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$X_i \sim \mathcal{B}er(\frac{1}{2})$$

3) On fait passer l'expérience à 10 sujets. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de sujets qui auront un temps de réflexion plus long à 60m qu'à 30m s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

Les 10 variables aléatoires $X_i$ associées à chacun des 10 individus sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Ainsi

$$X \sim \mathcal{B}in(10, \frac{1}{2})$$

4) On cherche $P(X \geq 3)$ :

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - [C_0^{10}(\frac{1}{2})^{10} + C_1^{10}(\frac{1}{2})^{10} + C_2^{10}(\frac{1}{2})^{10}] \\ &= 1 - [(\frac{1}{2})^{10}(1 + 10 + 45)] \\ &= 0.9453 \end{aligned}$$

5) On reproduit l'expérience sur 100 groupes de 10 plongeurs. On dispose donc de 100 observations de la variable aléatoire $X$ ou encore de la réalisation de 100 variables aléatoires toutes indépendantes et de même loi que $X$ : $\mathcal{B}in(10, 1/2)$. La loi des grands nombres nous dit alors que la moyenne de ces 100 valeurs va se rapprocher presque sûrement de l'espérance de $X$ qui vaut :

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$