Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

PSYCHOLOGIE - Licence 3

E53XPM

Statistique pour la psychologie 3

Examen du 30 mai 2006

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1) Notons les événements :

A : "ne participe à aucune manifestation"
O : "participe occasionnellement aux manifestations"
C : "participe constamment à toutes les manifestations"
F : "est favorable au déblocage de l'université"

Alors :

$P(A) = 0.28$ $\qquad$ $P(O) = 0.58$ $\qquad$ $P(C) = 0.14$

$P(F|A) = P_A(F) = 0.65$ $\qquad$ $P(F|O) = P_O(F) = 0.77$ $\qquad$ $P(F|C) = P_C(F) = 0.40$

2) A, O et C forment une partition de Ω

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(F|O) \times P(O) + P(F|A) \times P(A) + P(F|C) \times P(C) \\
&= (0.65 \times 0.28) + (0.77 \times 0.58) + (0.40 \times 0.14) \\
&= 0.6846
\end{aligned}$$

3) On cherche $P(A|\overline{F})$, $P(O|\overline{F})$ et $P(C|\overline{F})$. Pour cela :

$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 0.3154$
$P(\overline{F}|A) = 1 - P(F|A) = 0.35$
$P(\overline{F}|O) = 1 - P(F|O) = 0.23$
$P(\overline{F}|C) = 1 - P(F|C) = 0.60$

Formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P(A|\overline{F}) &= \frac{P(\overline{F}|A) \times P(A)}{P(\overline{F})} \\
&= \frac{(1 - P(F|A)) \times P(A)}{1 - P(F)} \\
&= \frac{0.35 \times 0.28}{0.3154} = 0.3107
\end{aligned}$$

De même,

$P(O|\overline{F}) = \dfrac{0.23 \times 0.58}{0.3154} = 0.4230$

$P(C|\overline{F}) = \dfrac{0.60 \times 0.14}{0.3154} = 0.2663$

Un étudiant contre le déblocage appartient donc le plus probablement au groupe des étudiants participant occasionnellement aux manifestations, avec une probabilité de 0.4230. (Remarque : ceci tient compte du poids des groupes, le groupe O étant très représenté)

Exercice 2 : Soit X la v.a. associée au temps passé en AG et G_1 et G_2 les événements :
G_1 : "étudiant peu ou pas engagé" $P(G_1) = 0.76$
G_2 : "étudiant très engagé" $P(G_2) = 0.24$
On a :

$$\begin{array}{rcl} P(X \mid G_1) & \sim & \mathcal{N}(5, 10^2) \\ P(X \mid G_2) & \sim & \mathcal{N}(26, 5^2) \end{array}$$

Et soit Z la variable centrée réduite associée : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

1) $P_1(X > 15) = P(X > 15 \mid G_1) = P(\frac{X-5}{10} > \frac{15-5}{10} \mid G_1) = P(Z > 1) = 0.1586$

2) $P_2(X > 15) = P(X > 15 \mid G_2) = P(\frac{X-26}{5} > \frac{15-26}{5} \mid G_2) = P(Z < -2.2) = 0.9861$

3) G_1 et G_2 forment une partition de Ω.

$$\begin{array}{rcl} P(X > 15) & = & P(X > 15 \mid G_1) \times P(G_1) + P(X > 15 \mid G_2) \times P(G_2) \\ & = & (0.1586 \times 0.76) + (0.9861 \times 0.24) = 0.3572 \end{array}$$

4) $P(G_1 | X > 15) = \dfrac{P(X > 15 \mid G_1) \times P(G_1)}{P(X > 15)} = \dfrac{0.1586 \times 0.76}{0.3572} = 0.3374$

$P(G_2 | X > 15) = \dfrac{P(X > 15 \mid G_2) \times P(G_2)}{P(X > 15)} = \dfrac{0.9861 \times 0.24}{0.3572} = 0.6626$

Avec une probabilité de 0.6626, c'est le groupe 2 qui est le groupe d'appartenance le plus probable d'un étudiant ayant passé plus de 15 heures en AG.

5) $P_1(X \geq 20) = P(Z \geq 1.5) = 0.0668$
et $P_2(X \leq 20) = P(Z \leq -1.2) = 0.1151$
$0.1151 > 0.0668$ donc un étudiant ayant passé 20 heures en AG sera donc affecté au groupe 2.

6) Il est facile de s'apercevoir sur un dessin que plus la valeur de x est grande, plus la probabilité 1 au dessus de x est importante : $P_1(X \geq x)$ est une fonction croissante de x. Inversement, $P_2(X \leq x)$ est une fonction décroissante de x. x_0 correspond donc au point d'équilibre de croisement de ces 2 courbes. Ainsi :

$$P_1(X \geq x_0) = P_2(X \leq x_0)$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x_0 - 5}{10} & = & -\dfrac{x_0 - 26}{5} \\ x_0 & = & 19 \end{array}$$

7) On note $T = X_1 + X_2 + .. + X_{36}$. T est la somme de 36 variables aléatoires indépendantes entre elles et toutes de loi $\mathcal{N}(26, 5^2)$.

$$\begin{array}{rcl} E(T) & = & E(X_1 + .. + X_{36}) \\ & = & E(X_1) + .. + E(X_{36}) \\ & = & 36 \times 26 = 936 \\ V(T) & = & V(T_1 + .. + T_{36}) \\ & = & V(T_1) + .. + V(T_{36}) \\ & = & 36 \times 5^2 = 900 \end{array}$$

D'où $T \sim \mathcal{N}(936, 30^2)$

8) $P(T \geq 900) = P(Z \geq \dfrac{900 - 936}{30}) = P(Z \geq -1.2) = 0.8849$

9)$P(T \geq 936 | T \geq 900) = \dfrac{P(T \geq 936 \cap T \geq 900)}{P(T \geq 900)} = \dfrac{P(T \geq 936)}{P(T \geq 900)}$

Or 936 étant l'espérance de T, on a $P(T \geq 936) = P(Z \geq 0) = 0.5$. D'où

$$P(T \geq 936 | T \geq 900) = \frac{0.5}{0.8849} = 0.5650$$

Exercice 3 :
1) L'événement E "c'est à la 3ème manifestation que l'étudiant participe pour la 1ère fois" signifie qu'il n'y a pas participé les 2 premières fois, qu'il participe à la 3ème et qu'il peut ou non participé aux 2 dernières manifestations. Ainsi :

$$P(E) = 0.6 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144$$

2) Notons X_i la variable associée à la manifestation i :
$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si l'étudiant y participe} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$X_i \sim \mathcal{B}er(0.4)$ et elles sont toutes indépendantes entre elles.
$X = \sum_{i=1}^{5} X_i$ ainsi X sera égale au nombre de participations sur les 5 manifestations.

$$X \sim \mathcal{B}in(5, 0.4)$$

3) $$\begin{aligned} P(X = 3) &= C_5^3 \times 0.4^3 \times 0.6^2 \\ &= 10 \times 0.4^3 \times 0.6^2 = 0.2304 \end{aligned}$$

4) $E(X) = 5 \times 0.4 = 2$

5) Soit n le nombre de manifestations. On veut :

$$\begin{aligned} n \times 0.4 &\geq 3 \\ n &\geq 7.5 \end{aligned}$$

Le nombre minimum de manifestations sera donc de 8.