PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

E53XPM

Statistique pour la psychologie 3

Examen du 11 juin 2008

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1) $\mathcal{U}_{N_{LM}} = \{1, 2\}$.

2) $C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

3) $P(N_{LM} = 1) = \frac{1 \times C_3^1}{C_4^2} = \frac{3}{6}$ (un seul choix pour le test LM et 1 parmi 3 pour le test PM).
$P(N_{LM} = 2) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6}$ (2 parmi 3 pour le test PM).

N_{LM}	1	2
	1/2	1/2

Représentation graphique par un diagramme en bâtons.

4)
$$\begin{aligned} E(N_{LM}) &= 1 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ Var(N_{LM}) &= (1^2 \times \tfrac{1}{2} + 2^2 \times \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{5}{2} - (\tfrac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= C_2^0 \times (\tfrac{3}{4})^0 \times (\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{16} = 0.0625 \\ P(X = 1) &= C_2^1 \times (\tfrac{3}{4})^1 \times (\tfrac{1}{4})^1 = \tfrac{3}{8} = 0.375 \\ P(X = 2) &= C_2^2 \times (\tfrac{3}{4})^2 \times (\tfrac{1}{4})^0 = \tfrac{9}{16} = 0.5625 \end{aligned}$$

X	0	1	2
	1/16	3/8	9/16

6)
$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \tfrac{3}{4} = \frac{3}{2} \\ Var(X) &= 2 \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

7) L'étendue de X est plus grande que celle de N_{LM}. Ces 2 variables sont centrées en la même valeur mais la variance de X est nécessairement plus grande puisque sa dispersion est plus élevée (les valeurs possibles s'écartent davantage de l'espérance)

8)X correspond à un concours où le candidat choisirait ses 2 épreuves au hasard avec la possibilité de passer 2 fois la même (après le premier choix, on repioche parmi les 4 possibilités pour le 2ème choix).

Exercice 2 : 1)

	Naissance de vrais jumeaux	Naissance autre
Signe diagnostic positif	22	10
Signe diagnostic négatif	78	190
	100	200

2)

$$\begin{cases} VJ : \text{“accoucher de vrais jumeaux”} \\ A : \text{“ avoir un autre type de grossesse (autre que des vraix jumeaux)”} \\ D_+ : \text{“le signe diagnostic est positif (i.e. il y a eu d'autres naissances multiples dans la famille)”} \\ D_- : \text{“le signe diagnostic est négatif (i.e. il n'y a pas eu d'autres naissances multiples dans la famille)”} \end{cases}$$

avec $D_+ = \overline{D_-}$ et $A = \overline{VJ}$.

Dans le tableau, on lit :
$P(D_+|VJ) = 0.22$ donc $P(D_-|VJ) = 0.78$
$P(D_+|A) = 0.05$ donc $P(D_-|A) = 0.95$

3) sensibilité $= P(D_+|VJ) = 0.22$
spécificité $= P(D_-|A) = 0.95$

4) $P(VJ) = 0.045$
Calculons $P(VJ|D_+)$ par la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(VJ|D_+) &= \frac{P(D_+|VJ) \times P(VJ)}{P(D_+)} \\ &= \frac{P(D_+|VJ) \times P(VJ)}{P(D_+|VJ) \times P(VJ) + P(D_+|A) \times P(A)} \\ &= \frac{0.22 \times 0.045}{0.22 \times 0.045 + 0.05 \times 0.955} \\ &= 0.172 \end{aligned}$$

avec $P(D_+) = 0.22 \times 0.045 + 0.05 \times 0.955 = 0.058$.

5) Calculons $P(A|D_-)$ par la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(A|D_-) &= \frac{P(D_-|A) \times P(A)}{P(D_-)} \\ &= \frac{P(D_-|A) \times P(A)}{1 - P(D_+)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.955}{1 - 0.058} \\ &= 0.963 \end{aligned}$$

6) Notons :
FJ : “accoucher de faux jumeaux”
AA : “grossesse autre que vrais jumeaux et que faux jumeaux”
Donc $A = FJ \cup AA$. On sait que $P(FJ|A) = 0.04$ et $P(D_+|FJ) = 0.15$.
D'où $P(FJ) = P(FJ|A) \times P(A) = 0.04 \times 0.955 = 0.0382$ puisque $FJ \subset A$.

7) Calculons $P(FJ|D_+)$ par la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(FJ|D_+) &= \frac{P(D_+|FJ) \times P(FJ)}{P(D_+)} \\ &= \frac{0.15 \times 0.0382}{0.058} \\ &= 0.099 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit X_M la variable aléatoire “poids des poulets nourris au maïs” :
$X_M \sim \mathcal{N}(3.1, \sigma^2 = 1.69)$.
Soit X_I la variable aléatoire “poids des poulets nourris avec un aliment industriel” :
$X_I \sim \mathcal{N}(3, \sigma^2 = 1.44)$.
X : désigne le poids de façon générale,
M : l'événement “poulet nourri au maïs”
I : l'événement “poulet nourri avec un aliment industriel”
Alors $P(M) = 0.4$ et $P(I) = 0.6$.

1) $P(X_M > 3.5) = P(\frac{X_M - 3.1}{1.3} > \frac{3.5 - 3.1}{1.3}) = P(U > 0.3077) = 0.3792$

2) $P(2.7 < X_M < 3.5) = P(-0.3077 < U < 0.3077) = 1 - 2 \times 0.3792 = 0.2416$

3) $P(X_I < 2.4) = P(\frac{X_I - 3}{1.2} < \frac{2.4 - 3}{1.2}) = P(U < -0.5) = P(U > 0.5) = 0.3085$

4) $P(X_I < 1.8|X_I < 2.4) = \frac{P(X_I < 1.8 \cap X_I < 2.4)}{P(X_I < 2.4)} = \frac{P(X_I < 1.8)}{P(X_I < 2.4)}$
Or $P(X_I < 1.8) = P(\frac{X_I - 3}{1.2}) < \frac{1.8 - 3}{1.2} = P(U < -1) = P(U > 1) = 0.1587$
D'où $P(X_I < 1.8|X_I < 2.4) = \frac{0.1587}{0.3085} = 0.5144$

5) $P(X_I > 3|X_I < 2.4) = 0$ bien sûr !!!

6) $P(X_I < 2.4|X_I > 1.8) = \frac{P(X_I < 2.4 \cap X_I > 1.8)}{P(X_I > 1.8)} = \frac{P(1.8 < X_I < 2.4)}{P(X_I > 1.8)} = \frac{0.3085 - 0.1587}{1 - 0.1587} = \frac{0.1498}{0.8413} = 0.1781$

7) Calculons $P(M|X > 4.3)$ et $P(I|X > 4.3)$.
$P(M|X > 4.3) = \frac{P(X > 4.3|M) \times P(M)}{P(X > 4.3)}$
$P(I|X > 4.3) = \frac{P(X > 4.3|I) \times P(I)}{P(X > 4.3)}$
Il suffit de comparer les numérateurs. Or,
$P(X > 4.3|M) \times P(M) = P(X_M > 4.3) \times P(M) = P(U > 0.9231) \times 0.4 = 0.1780 \times 0.4 = 0.0712$
$P(X > 4.3|I) \times P(I) = P(X_I > 4.3) \times P(I) = P(U > 1.0833) \times 0.6 = 0.1393 \times 0.6 = 0.0836$
Il est donc plus probable que ce poulet ait été nourri avec un aliment industriel.

8) On reprend le raisonnement pour un poulet de plus de 6 kgs. Calculons $P(M|X > 6)$ et $P(I|X > 6)$.
$P(M|X > 6) = \frac{P(X > 6|M) \times P(M)}{P(X > 6)}$
$P(I|X > 6) = \frac{P(X > 6|I) \times P(I)}{P(X > 6)}$
Il suffit de comparer les numérateurs.
$P(X > 6|M) \times P(M) = P(X_M > 6) \times P(M) = P(U > 2.2308) \times 0.4 = 0.0128 \times 0.4 = 0.0051$
$P(X > 6|I) \times P(I) = P(X_I > 6) \times P(I) = P(U > 2.5) \times 0.6 = 0.0062 \times 0.6 = 0.0037$
La conclusion est donc inversée : il est donc plus probable que ce poulet ait été nourri au maïs.