PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

E53XPM

Statistiques appliquées à la psychologie 3

Examen du 5 novembre 2005

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1) Notons les événements :
M : "être atteint de la maladie"
T : "la réaction au test est positive"
Alors on a : $P(M) = 0.3$ $\quad P_{\overline{M}}(\bar{T}) = 0.9$ $\quad P_M(T) = 0.8$.

2) On cherche $P(T)$
M et $\bar{M}$ forment une partition de Ω.
En appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M}) \\ &= P_M(T) \times P(M) + (1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})) \times (1 - P(M)) \\ &= (0.8 \times 0.3) + (0.1 \times 0.7) = 0.31 \end{aligned}$$

3) On cherche $P_T(M)$
En appliquant la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} \\ &= \frac{0.8 \times 0.3}{0.31} = 0.774 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) $A = B_1 \cap B_2$ et $P(A) = P(B_1) \times P(B_2) = 0.9^2 = 0.81$ car B_1 et B_2 sont indépendants (on a supposé que les 2 empoyés travaillent indépendamment l'un de l'autre).

2)
$$\begin{aligned} F &= E_1 \cup E_2 \\ PR &= E_1 \cap E_2 \\ RL &= (\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2}) \end{aligned}$$
et $F = PR \cup RL$ (union de 2 parties disjointes).

Pour les probabilités, on a :

$$\begin{aligned} P(PR) &= P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = 0.7 \times 0.7 = 0.49 \quad \text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont indépendants)} \\ P(RL) &= P((\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})) = P(\overline{E_1} \cap E_2) + P(E_1 \cap \overline{E_2}) = 2 \times 0.7 \times 0.3 = 0.42 \\ P(F) &= P(PR) + P(RL) = 0.49 + 0.42 = 0.91 \\ &= = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91 \end{aligned}$$

3)

X_1	0	3
$P(X_1 = v)$	0.19	0.81

X_2	0	2	3
$P(X_2 = v)$	0.09	0.42	0.49

4) $E(X_1) = 3 \times 0.81 = 2.43$ et $E(X_2) = (2 \times 0.42) + (3 \times 0.49) = 0.84 + 1.47 = 2.31$
L'option 1 ayant une espérance plus grande est donc la plus rentable pour l'entreprise.

Exercice 3 :

1) On effectue 7 répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire : connexion au site MIAP. À la $i^{\text{ème}}$ répétition, on désigne par X_i la variable aléatoire ayant pour valeur 1 si la connexion est réussie et 0 sinon. Alors ces 7 variables aléatoires X_i ont pour loi $X_i \sim \mathcal{B}er(0.8)$ et sont indépendantes entre elles. Ainsi $X = \sum_{i=1}^{7} X_i$ compte le nombre de connexions réussies et la loi de X est donc :

$$X \sim \mathcal{B}in(7; 0.8)$$

Alors $P(X = 3) = C_7^3 * 0.8^3 * 0.2^4 = \dfrac{7!}{3!4!} * 0.8^3 * 0.2^4 = 35 * 0.8^3 * 0.2^4 = 0.0287$.

2) Soit n le nombre d'essais à réaliser. Alors $X \sim \mathcal{B}in(n; 0.8)$ et pour qu'en moyenne le nombre de connexions réussies soit supérieur ou égal à 4, il faut :

$$E(X) = n * 0.8 \geq 4 \quad \text{d'où} \quad n \geq 5$$

3) Si 3 essais sont nécessaires pour réussir à établir la 1ère connexion, cela signifie que les 2 premiers essais ont échoué donc la probabilité de cet événement est :

$$0.2 * 0.2 * 0.8 = 0.032$$

Exercice 4 : Soit Y la durée de connexion internet au site MIAP. On suppose $Y \sim \mathcal{N}(120, \sigma = 40)$. Soit $Z = \dfrac{Y - 120}{40}$ la variable centrée réduite de Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1) Une durée de connexion est une variable positive, or une variable de loi normale peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier (valerus réelles positives ou négatives). en ce sens cette modélisation peut être surprenante. Cependant l'espérance étant de 120 et l'écart-type de 40 ... les valeurs négatives auront une probabilité négligeable.

2) $P(Y > 180) = P(Z > \dfrac{180 - 120}{40}) = P(Z > 1.5) = 0.0668$

3) $P(Y < 80) = P(Z < \dfrac{80 - 120}{40}) = P(Z < -1) = 0.1587$

4) On cherche la durée y dépassée avec plus de 95% de chances.
$P(Y > y) = 0.95 = P(Z > \dfrac{y - 120}{40})$ d'où $\dfrac{y - 120}{40} = -1.6448$ d'où $y = 120 - (40 * 1.6448) = 54.208$

5) $P(Y < 180 | Y > 120) = \dfrac{P((120 < Y) \cap (Y < 180))}{P(Y > 120)} = \dfrac{P(120 < Y < 180)}{P(Y > 120)} = \dfrac{0.5 - 0.0668}{0.5} = 0.8664$

6) $Z = 10 + 2 * Y$ avce les propriétés sur l'espérance et la variance on obtient :

$$\begin{array}{lcl} E(Z) & = & 10 + 2 * E(Y) = 10 + 2 * 120 = 250 \\ Var(Z) & = & 2^2 * Var(Y) = 4 * 40^2 = 6400 \\ \sigma(Z) & = & 80 \end{array}$$

7) $T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$: somme de 5 variables aléatoires indépendantes entre elles. On a alors :

$$\begin{array}{lcl} E(T) & = & E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) + E(Y_4) + E(Y_5) = 5 * 120 = 600 \\ Var(T) & = & Var(Y_1) + Var(Y_2) + Var(Y_3) + Var(Y_4) + Var(Y_5) = 5 * 40^2 = 8000 \\ \sigma(T) & = & 89.44 \end{array}$$