Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

PSYCHOLOGIE - Licence 3

E53XPM

Statistique pour la psychologie 3

Examen du 4 novembre 2006

CORRIGÉ

Exercice 1 :

1) Notons les événements :
A : “Aristide vient à la fête”
B : “Bérénice vient à la fête”
C : “Constance vient à la fête”

2) A et C sont incompatibles
B et C sont incompatibles
A et B sont indépendants

4) L'événement “Aristide et Bérénice viennent tous les deux” s'écrit $A \cap B$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

5) Soit M l'événement “aucun des trois amis ne vient”, alors $\overline{M}$ est “au moins l'un vient”.
Ainsi : $\overline{M} = (A \cup B) \cup C$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad P(M) &= 1 - P(\overline{M}) \\ &= 1 - P(A \cup B) - P(C) \quad \text{car } C \text{ et } A \cup B \text{ sont incompatibles} \\ &= 1 - \frac{7}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

6) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui viennent.

x	0	1	2	
$P(X = x)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

7)
$$\begin{aligned} E(X) &= (0 \times \frac{5}{16}) + (1 \times \frac{10}{16}) + (2 \times \frac{1}{16}) \\ &= \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
V(X) & = & E(X^2) - E(X)^2 \\
 & = & (0^2 \times \frac{5}{16}) + (1^2 \times \frac{10}{16}) + (2^2 \times \frac{1}{16}) - (\frac{3}{4})^2 \\
 & = & \frac{14}{16} - \frac{9}{16} = \frac{5}{16} \\
\text{ou} & = & E((X - E(X))^2) \\
 & = & (\frac{3}{4})^2 \times \frac{5}{16} + (\frac{1}{4})^2 \times \frac{10}{16} + (\frac{5}{4})^2 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{16}
\end{array}$$

6) A, B et C sont indépendants.

8) On répète sur 3 personnes et de façon indépendante une expérience de Bernoulli (1 - "venir" / 0 - "ne pas venir") ayant une probabilité 0.25 de venir. La loi de probabilité de la variable aléatoire T qui compte le nombre de personnes qui viennent est donc une loi $\mathcal{B}in(3, 0.25)$. Elle est donnée par le tableau suivant :

t	0	1	2	3
$P(T = t)$	$(\frac{3}{4})^3$	$3 \times \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^2 = (\frac{3}{4})^3$	$3 \times (\frac{1}{4}) \times \frac{3}{4}$	$(\frac{1}{4})^3$

$$\begin{array}{lcl}
9) \quad E(T) & = & 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
V(T) & = & 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}
\end{array}$$

Exercice 2 :

1) Notons les événements :

M : "travailler le matin"
AM : "travailler l'après-midi"
N : "travailler la nuit"
et A : "être absent".

Alors

$$\begin{array}{lcl}
P_M(A) & = & 0.04 \\
P_{AM}(A) & = & 0.08 \\
P_N(A) & = & 0.22
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
P(M) & = & 0.4 \\
P(AM) & = & 0.4 \\
P(N) & = & 0.2
\end{array}$$

2) On cherche $P(A)$.
M, AM et N forment une partition de Ω, on utlise la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{lcl}
P(A) & = & P_M(A) \times P(M) + P_{AM}(A) \times P(AM) + P_N(A) \times P(N) \\
 & = & 0.04 \times 0.4 + 0.08 \times 0.4 + 0.22 \times 0.2 \\
 & = & 0.092
\end{array}$$

9.2% d'absentéisme.

3) On cherche $P_A(M)$.
D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{array}{lcl}
P_A(M) & = & \frac{P_M(A) \times P(M)}{P(A)} \\
 & = & \frac{0.04 \times 0.4}{0.092} \\
 & = & 0.1739
\end{array}$$

4) On cherche $P_{\overline{A}}(M)$.
D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(M) &= \frac{P_M(\overline{A}) \times P(M)}{P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.96 \times 0.4}{0.908} \\ &= 0.4229 \end{aligned}$$

5) On cherche $P_{M \cup AM}(A)$.

$$\begin{aligned} P_{M \cup AM}(A) &= \frac{P_A(M \cup AM) \times P(A)}{P(M \cup AM)} \\ &= \frac{(P_A(M) + P_A(AM)) \times P(A)}{P(M) + P(AM)} \\ &= \frac{(0.1739 + 0.3478) \times 0.092}{0.8} \\ &= 0.06 \end{aligned}$$

car $P_A(AM) = \dfrac{P_{AM}(A) \times P(AM)}{P(A)} = \dfrac{0.08 \times 0.4}{0.092} = 0.3478$

Exercice 3 :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 0.9, \sigma = 0.10) \quad \text{et} \quad U = \frac{X - 0.9}{0.10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

1) $$\begin{aligned} P(X > 0.75) &= P(U > \frac{0.75 - 0.9}{0.10}) \\ &= P(U > -1.5) \\ &= 0.933 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} P_{X<0.9}(X > 0.75) &= \frac{P(X > 0.75 \ \cap \ X < 0.9)}{P(X < 0.9)} \\ &= \frac{P(0.75 < X < 0.9)}{P(X < 0.9)} \\ &= \frac{0.933 - 0.5}{0.5} \\ &= 0.866 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} P_{X>0.9}(X > 1) &= \frac{P(X > 1 \ \cap \ X > 0.9)}{P(X > 0.9)} \quad \text{car} P(X > 1) = P(U > 1) = 0.1587. \\ &= \frac{P(X > 1)}{P(X > 0.9)} \\ &= \frac{0.1587}{0.5} \\ &= 0.3174 \end{aligned}$$

4) On cherche v_1 telle que : $P(X < v_1) = 0.1$ ou encore $P(U < \dfrac{v_1 - 0.9}{0.1}) = 0.1$
Donc

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - 0.9}{0.1} &= -1.2816 \\ \text{d'où} \quad v_1 &= 0.9 - 0.1 \times 1.2816 \\ &= 0.7718 \end{aligned}$$

5) On cherche v_2 telle que : $P(X > v_2) = 0.1$ ou encore $P(U > \dfrac{v_2 - 0.9}{0.1}) = 0.1$
D'où $v_2 = 0.9 + 0.1 \times 1.2816 = 1.02816$.

6) L'intervalle $[v_1; v_2]$ a pour probabilité 0.8

7) $$\begin{aligned} P(X > 1.2) &= P(U > \frac{0.3}{0.1} \\ &= P(U > 3) \\ &= 0.00135 \end{aligned}$$
Ils se trompent 1.35 fois sur 1000 !