Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

PSYCHOLOGIE - Licence 3

E53XPM

Statistique pour la psychologie 3

Examen du 10 novembre 2007

CORRIGÉ

Exercice :

- **Hypothèse 1 :** A et B sont des événements incompatibles.
  $A \cap B = \emptyset$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$
  $P_A(B) = 0$

- **Hypothèse 2 :** A ne peut être réalisé que si B est réalisé.
  $A \subset B$
  $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}$
  $P_A(B) = 1$

- **Hypothèse 3 :** A et B sont des événements indépendants.
  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{2}$
  $P(B)(1 - P(A)) = \frac{1}{2} - P(A)$
  $$P(B) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{8}$$
  $P_A(B) = P(B) = \frac{3}{8}$

Problème :

Partie 1 :

1. Notons les événements :
   T : "le test est positif"
   ($\overline{T}$: "le test est négatif")
   A : "l'alcoolémie est supérieure à 0.80 g/l"
   ($\overline{A}$: "l'alcoolémie est inférieure à 0.80 g/l")

Alors

$$\begin{array}{rcl} P_A(T) & = & 0.96 \\ P_A(\overline{T}) & = & 0.04 \\ P_{\overline{A}}(T) & = & 0.03 \\ P_{\overline{A}}(\overline{T}) & = & 0.97 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P(A) & = & 0.05 \\ P(\overline{A}) & = & 0.95 \end{array}$$

2. On cherche $P(T)$. A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

$$\begin{array}{rcl} P(T) & = & P_A(T) \times P(A) + P_{\overline{A}}(T) \times P(\overline{A}) \\ & = & (0.96 \times 0.05) + (0.03 \times 0.95) \\ & = & 0.0765 \end{array}$$

3. On cherche $P_T(A)$. Avec la formule de Bayes, on a :

$$\begin{array}{rcl} P_T(A) & = & \dfrac{P_A(T) \times P(A)}{P(T)} \\ & = & \dfrac{0.96 \times 0.05}{0.0765} \\ & = & 0.627 \end{array}$$

4. On cherche $P_{\overline{T}}(\overline{A})$. Avec la formule de Bayes, on a :

$$\begin{array}{rcl} P_{\overline{T}}(\overline{A}) & = & \dfrac{P_{\overline{A}}(\overline{T}) \times P(\overline{A})}{P(\overline{T})} \\ & = & \dfrac{0.97 \times 0.95}{1 - 0.0765} \\ & = & 0.998 \end{array}$$

Partie 2 :

5. Pour le conducteur numéro i, notons X_i la variable aléatoire définie par :
   $X_i = 1$: si le conducteur numéro i a un taux d'alcoolémie supérieur à 0.80 g/l
   $X_i = 0$: si le conducteur numéro i a un taux d'alcoolémie inférieur à 0.80 g/l

$$X_i \sim \mathcal{B}er(0.05)$$

Alors $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$. X est donc la somme de 100 variables aléatoires de Bernoulli de probabilité 0.05, toutes indépendantes entre elles.

$$X \sim \mathcal{B}in(100, 0.05)$$

6. $$\begin{array}{rcl} P(X=2) & = & C_{100}^2 \times 0.05^2 \times 0.95^{98} \\ & = & \dfrac{100!}{2! \times 98!} \times 0.05^2 \times 0.95^{98} \\ & = & (50 \times 99) \times 0.05^2 \times 0.95^{98} \\ & = & 0.0812 \end{array}$$

7. Soit D l'événement “au moins 2 conducteurs parmi les 100 ont un taux d'alcoolémie supérieur à 0.80 g/l”.

$$\begin{array}{rcl} P(\overline{D}) & = & P(X=0) + P(X=1) \\ & = & C_{100}^0 \times 0.05^0 \times 0.95^{100} + C_{100}^1 \times 0.05^1 \times 0.95^{99} \\ & = & (0.95^{100}) + (100 \times 0.05^1 \times 0.95^{99}) \\ & = & 0.00592 + 0.03116 \\ & = & 0.0371 \end{array}$$

Donc $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0.9629$.

8. $$\begin{array}{rcl} E(X) & = & 100 \times 0.05 \\ & = & 5 \\ V(X) & = & 100 \times 0.05 \times 0.95 \\ & = & 4.75 \end{array}$$

Partie 3 :

$$S \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma = 0.3)$$

Notons $U = \dfrac{S-\mu}{0.3} \sim \mathcal{N}(0; \sigma = 1)$

9.
$$\begin{aligned} P(S < 0.80) &= 0.95 \\ P\left(\frac{S-\mu}{0.3} < \frac{0.80-\mu}{0.3}\right) &= 0.95 \\ P\left(U < \frac{0.80-\mu}{0.3}\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} \frac{0.80-\mu}{0.3} &= 1.6449 \\ 0.80-\mu &= 0.3 \times 1.6449 \\ \mu &= 0.80 - 0.3 \times 1.6449 \\ \mu &= 0.3065 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} P(S < v) &= 0.70 \\ P\left(\frac{S-0.31}{0.3} < \frac{v-0.31}{0.3}\right) &= 0.70 \\ P\left(U < \frac{v-0.31}{0.3}\right) &= 0.70 \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} \frac{v-0.31}{0.3} &= 0.5244 \\ v-0.31 &= 0.3 \times 0.5244 \\ v &= 0.31 + 0.3 \times 0.5244 \\ v &= 0.4673 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} P(S \in [v; 0.8]) &= P(S \in [0.4673; 0.8]) \\ &= P(0.4673 < S < 0.80) \\ &= 0.95 - 0.70 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

12. On cherche $P_{S>0.4}(S < 0.80)$.
$$\begin{aligned} P_{S>0.4}(S < 0.80) &= \frac{P(S > 0.4 \ \cap \ S < 0.8)}{P(S > 0.4)} \\ &= \frac{P(0.4 < S < 0.8)}{P(S > 0.4)} \end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned} P(S > 0.4) &= P\left(\frac{S-0.31}{0.3} > \frac{0.4-0.31}{0.3}\right) \\ &= P(U > 0.3) \\ &= 0.3821 \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} P_{S>0.4}(S < 0.80) &= \frac{0.3821 - 0.05}{0.3821} \\ &= 0.869 \end{aligned}$$