PSYCHOLOGIE - Licence 3

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

# E54XP1

## Statistique pour la psychologie L3S5

**Examen du 15 septembre 2009**

## CORRIGÉ

---

**Exercice 1 :**
Soit $X$ la variable aléatoire “température d'une personne saine”

$X \sim \mathcal{N}(37.2, \sigma = 0.2)$ et $U = \dfrac{X - 37.2}{0.2} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
1)\quad P(X > 37) &= P(\frac{X-37.2}{0.2} > -1) \\
&= P(U > -1) \\
&= 1 - P(U > 1) \\
&= 1 - 0.159 = 0.841
\end{aligned}
$$

2) Soit $t_M$ la température maximale des 10% des personnes saines ayant les températures les plus basses alors $P(X < t_M) = 0.1$. Donc

$$
\begin{aligned}
P(X < t_M) &= P(\frac{X-37.2}{0.2} < \frac{t_M - 37.2}{0.2}) \\
&= P(U < \frac{t_M - 37.2}{0.2}) \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

Donc $P(U > -\dfrac{t_M - 37.2}{0.2}) = 0.1$ d'où $-\dfrac{t_M - 37.2}{0.2} = 1.2816$.
Ce qui donne $t_M = 37.2 - 1.2816 \times 0.2 = 36.94$

3) Soit $t_m$ la température minimale des 10% des personnes saines ayant les températures les plus élevées. alors $P(X > t_m) = 0.1$. Par symétrie de la distribution autour de l'espérance : $t_m = 37.2 + 1.2816 \times 0.2 = 37.46$

4) Les 50% des personnes saines ayant les températures les plus élevées ont une température supérieure à 37.2. On cherche donc :

$$
\begin{aligned}
P_{X>37.2}(X > 37.6) &= \frac{P(X > 37.6 \cap X > 37.2)}{P(X > 37.2)} \\
&= \frac{P(X > 37.6)}{0.5}
\end{aligned}
$$

$$\text{Or} \quad P(X > 37.6) = P(\frac{X-37.2}{0.2} > \frac{0.4}{0.2}) = P(U > 2) = 0.023$$

D'où $P_{X>37.2}(X > 37.6) = \dfrac{0.023}{0.5} = 0.046$

5) $P_{X>37.2}(X < 37) = 0$

6) D'après les questions 2 et 3 : $P(36.94 < X < 37.46) = 0.8$ donc $ID_{0.8}(X) = [36.94; 37.46]$.

7) Soit $S$ la somme des 7 relevés : $S = X_1 + X_2 + ... + X_7 = \sum_{i=1}^{7} X_i$.
Alors $E(S) = 7 \times 37.2 = 260.4$ et $\text{Var}(S) = 7 \times 0.2^2 = 0.28$ (en supposant l'indépendance des relevés) et $S \sim \mathcal{N}(260.4, \sigma(S) = 0.5292)$
Donc $P(S > 260.4) = 0.5$
et $P(-1.2816 < \dfrac{S-260.4}{0.5292} < 1.2816) = 0.8$
d'où $P(260.4 - 1.2816 \times 0.5292 < S < 260.4 + 1.2816 \times 0.5292)$
$P(259.72 < S < 261.08)$

$$ID_{80\%}(S) = [259.72; 261.08]$$

8) $\overline{X} = \dfrac{S}{10}$ d'où $E(\overline{X}) = 37.2$ et $\text{Var}(\overline{X}) = \dfrac{0.04}{7}$
et $\overline{X} \sim \mathcal{N}(37.2, \sigma(\overline{X}) = 0.0756)$
Même raisonnement qu'à la question précédente :

$$\begin{aligned} ID_{80\%}(S) &= [37.2 - 1.2816 \times 0.0756; 37.2 + 1.2816 \times 0.0756] \\ &= [37.1; 37.3] \end{aligned}$$

**Exercice 2 :**
1) On définit les événements :

| | |
|---|---|
| $A$ | : "être atteint de la grippe A" |
| $(\overline{A}$ | : "ne pas être atteint de la grippe A") |
| $T+$ | : "le test est positif" équivaut à "$T > 39$" si $T$ désigne la température |
| $(T- = \overline{T+}$ | : "le test est négatif" équivaut à "$T < 39$") |

$$\text{Alors} \quad \begin{aligned} P_A(T-) &= 0.35 = P_A(\overline{T+}) \\ P_{\overline{A}}(T+) &= 0.25 \end{aligned}$$

2) Sensibilité : $Se = P_A(T+) = 1 - P_A(T-) = 1 - 0.35 = 0.65$
Spécificité : $Sp = P_{\overline{A}}(T-) = 1 - P_{\overline{A}}(T+) = 1 - 0.25 = 0.75$

3) Pour un test idéal :
$Se = 1$ le test est toujours positif quand la personne est malade
$Sp = 1$ le test est toujours négatif quand la personne n'est pas malade

4) Si l'on augmente le seuil à 40°C, alors il risque d'y avoir des personnes atteintes de la grippe A dont la température ne dépassera pas 40°C et pour lesquelles le test sera donc négatif. Ainsi $Se$ diminue.
Par contre, pour les personnes non atteintes de la grippe A, il y aura d'autant plus de test

négatif donc $Sp$ augmente.

5) $P_{T+}(A)$ : c'est la valeur prédictive positive.

6) Une prévalence de 20% indique : $P(A) = 0.2$.

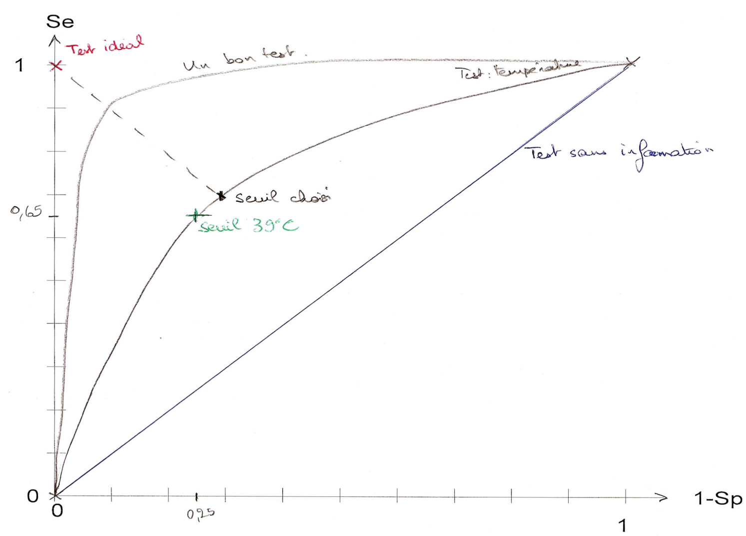
$$
\begin{aligned}
\text{Alors} \quad P_{T+}(A) &= \frac{P_A(T+) \times P(A)}{P(T+)} \\
&= \frac{P_A(T+) \times P(A)}{P_A(T+) \times P(A) + P_{\overline{A}}(T+) \times P(\overline{A})} \\
&= \frac{0.65 \times 0.20}{0.65 \times 0.20 + 0.25 \times 0.80} \\
&= \frac{0.13}{0.33} = 0.39
\end{aligned}
$$

7) Voir graphique corrigé
8) Voir graphique corrigé
9) Voir graphique corrigé (rappel test idéal : $Se = 1, Sp = 1$ donc $1 - Sp = 0$)
10) Voir graphique corrigé
11) Un signe diagnostic non informatif :

$$P_A(T+) = P_{\overline{A}}(T+) = 1 - P_{\overline{A}}(T-)$$

$$Se = 1 - Sp$$

voir graphique corrigé.
12) Voir graphique corrigé




**Exercice 3 :** Soit $A$ l'événement "être atteint de la grippe" - $P(A) = \frac{1}{5} = 0.20$

1) Dans un service de 10 personnes, soit $N$ la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes atteintes par la grippe. On répète 10 fois l'observation d'un événement de probabilité 0.20. Pour l'observation $i$ ($i = 1, .., 10$), on note :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la personne est atteinte de la grippe} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$X_i \sim \mathcal{B}er(\frac{1}{5})$.

$N = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$ on peut alors suggérer $N \sim \mathcal{B}in(10; \frac{1}{5})$

Cependant, il est difficilement imaginable que les 10 variables soient indépendantes entre elles.

2) $P(X = 1) = C_{10}^1 \times (\frac{1}{5})^1 \times (\frac{4}{5})^9 = 10 \times \frac{4^9}{5^{10}} = 0.2684$

3)
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - (\frac{4}{5})^{10} - 0.2684 \\ &= 1 - 0.1074 - 0.2684 \\ &= 0.6242 \end{aligned}$$

4) $E(N) = 10 \times 0.20 = 2$ et $\mathrm{Var}(N) = 10 \times 0.2 \times 0.8 = 1.6$