Chapitre 1 : Taux d'évolution

I] Rappels de lycée – pourcentages :

I.1. Pourcentage :

Calculer t % d'une quantité A c'est faire : $\frac{t}{100} \times A$

Exercice : Dans une assemblée de 550 députés, 8 % sont des avocats. Combien y a-t-il de députés dont le métier est avocat ? Si 11 députés seulement étaient avocats, cela représenterait quel pourcentage des députés de l'assemblée ?

Augmentation ou diminution en pourcentage :

La valeur d'une quantité A augmente de t % . Sa nouvelle valeur est égale à :

$$A' = (1 + t/100) \times A$$

On appelle le réel $\boxed{k = 1 + (t / 100)}$ le coefficient multiplicateur.

La valeur d'une quantité A diminue de t % . Sa nouvelle valeur est égale à :

$$A' = (1 - t/100) \times A$$

Le coefficient multiplicateur est de $\boxed{k = 1 - (t / 100)}$

Exercices :

1. Conséquence de la crise : le budget de publicité pour l'année en cours d'une entreprise de location de véhicules a baissé de 18 %. En 2012, son montant était de 120 000 euros. Calculer le budget de 2013.

2. La facture hors taxes d'une note de frais s'élève à 130 euros ; il y a 5 % de TVA. Calculer le montant de la facture toutes taxes comprises.

I.2.Variations relatives :

Un nombre y_1 devient y_2 après avoir été multiplié par un nombre k ;

le nombre **$k = y_2/y_1$** est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de y_1 à y_2.

Définition :

La variation relative de y_1 à y_2 est : $\Delta t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$, **Δt est aussi appelé taux d'évolution**.

Si Δt est positif, l'évolution est une augmentation ;
si Δt est négatif, l'évolution est une diminution.

Remarque : $y_2 - y_1$ est appelé variation absolue.

Exercices :

1. Un produit coûtant 2500 euros en 2012, a coûté 2800 euros en 2013. Calculer le coefficient multiplicateur et la variation relative.

2. Ce même produit coûtera 2600 euros en 2014. Calculer alors la variation relative.

II] Taux d'évolution

Définition : **Le taux d'évolution** (ou variation relative) entre deux nombres réels strictement positifs, y_1 et y_2 est le nombre $\boxed{t_e = \frac{y_2 - y_1}{y_1}}$.

On a alors $\mathbf{y_2 = (1 + t_e) y_1}$;

on dit que **$1 + t_e = k$ est le coefficient multiplicateur.**

Si k >1 , cela correspond à une hausse, si k < 1 cela correspond à une baisse.

Définition : **Taux global** : le taux global d'évolution correspondant à deux évolutions successives de taux respectifs t_1 et t_2 est le réel T tel que : $\mathbf{1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)}$

Exercice : La société Ventout a augmenté en 2012 son budget publicitaire de 15 % par rapport à son budget publicitaire de 2011. Elle l'a encore augmenté de 8 % en 2013 par rapport à celui de l'année précédente.
Calculer le taux global T d'évolution du budget publicitaire sur la période 2011-2013.

Définition :

Le taux moyen d'évolution correspondant à deux évolutions successives de taux respectifs t_1 et t_2 est le taux t qui, répété deux fois, fournirait le même taux global T.
Donc $(1 + t)^2 = 1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)$
Ce qui équivaut à $\mathbf{1 + t = \sqrt{(1 + t_1)(1 + t_2)}}$

Exercice suite : Quel est le taux moyen d'augmentation du budget publicitaire de la société Ventout entre 2011 et 2013.

Définition :

La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est le nombre réel positif $k = \sqrt{a \times b}$.

Définition :

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout réel a positif, il existe un unique réel x positif tel que $x^n = a$.

x est appelé racine n-ième de a , et on le note $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Cas de n évolutions successives :

Le taux global d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1 , t_2 … t_n est le réel T tel que :

$$1 + T = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \ldots\ldots \times (1 + t_n) .$$

Le taux moyen d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1 , t_2 … t_n est le taux t qui, répété n fois, fournirait le même taux global T .

Donc $(1 + t)^n = 1 + T = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \ldots\ldots \times (1 + t_n)$

ce qui équivaut à $1 + t = 1+T\ ^{\frac{1}{n}}$

Exemples :

- *Le SMIC horaire a augmenté de 5,2 % en 2001 par rapport à l'année 2000, de 3,2 % en 2002 puis de 3,8 % en 2003.*

On a alors $k_1 = 1 + t_1 = 1{,}052$; $k_2 = 1 + t_2 = 1{,}032$ et $k_3 = 1 + t_3 = 1{,}038$.

Le coefficient multiplicateur global est

$$\mathbf{k = k_1 \times k_2 \times k_3 = 1{,}052 \times 1{,}032 \times 1{,}038 = 1{,}127} \quad \text{(arrondi à 0,001) .}$$

On n'en déduit : **le SMIC horaire a augmenté de 12,7 % entre 2000 et 2003.**

Le taux moyen d'augmentation t vérifie l'égalité $\mathbf{(1 + t)^3 = 1{,}127}$

soit $\mathbf{1 + t = 1{,}127^{1/3} = 1{,}041}$.

Soit un taux moyen annuel d'augmentation égal à 4,1 %.

- *Le baril de pétrole a augmenté de 17,5 % en un an.*

L'augmentation moyenne mensuelle correspondante est égale à

$$\mathbf{1 + t = 1{,}175^{1/12} = 1{,}0135.}$$

Soit une augmentation mensuelle moyenne de 1,35 %.

Taux d'évolution réciproque :

Pour une évolution de y_1 à y_2 , de taux d'évolution t , l'évolution réciproque de y_2 à y_1 de taux d'évolution t' a pour coefficient multiplicateur l'inverse du coefficient multiplicateur de y_1 à y_2

Donc $\mathbf{1 + t' = \dfrac{1}{1 + t}}$.

III] Approximation de taux d'évolution

Formules d'approximations au voisinage de zéro :

lorsque t est un nombre proche de zéro, on a les formules d'approximations suivantes :

$$(1+t)^2 \approx 1+2t \quad ; \quad \frac{1}{1+t} \approx 1-t$$

On considère des taux d'évolution t petits, c'est-à-dire proche de zéro :

Propriétés :

- Si on a 2 variations successives d'un même taux t proche de 0, alors 2t est une approximation du taux global d'évolution.
- Si t est le taux, proche de 0, d'une évolution alors - t est une approximation du taux de l'évolution réciproque.

Exercice 1 : Un technicien a été embauché à 1200 € par mois. Il a bénéficié depuis de deux augmentations successives de 2 %.

1. *À l'aide d'une formule d'approximations pour les petits taux d'évolution, donner une valeur approchée t' sous forme de pourcentage, du taux d'évolution global t du salaire après les deux augmentations.*
2. *Utiliser la valeur de t' pour déterminer une valeur approchée S' du salaire S du technicien après les deux augmentations.*
3. *Calculer la valeur exacte sous forme de pourcentage du taux d'évolution global t.*
4. *En déduire la valeur exacte du salaire S après les deux augmentations.*
5. *Vérifier que la différence S – S' est inférieure à 50 centimes d'euros.*

Exercice 2 : Une matière première coûtait 140 € le kilo la semaine dernière.

1. *Calculer le prix P_1 du kilo de cette matière première après une hausse de 1 %.*
2. *Calculer le coefficient multiplicateur k_1 de la baisse qu'il faudrait appliquer au prix du kilo de cette matière première pour qu'ils reviennent à 140 €. Arrondir à 10^{-4} .*
3. *En déduire le taux d'évolution t_1 de cette baisse sous forme de pourcentage.*
4. *À l'aide d'une formule d'approximations pour les petits taux d'évolution, donner une valeur approchée t_2 du pourcentage de la baisse qui ramènerait le prix du kilo de matière première de P_1 à 140 €.*
5. *En faisant baisser le prix P_1 de t_2 % , retrouve-t-on le prix de 140 € ?*

IV] Indice simple en base 100

Définition :

y_1 et y_2 étant deux nombres réels strictement positifs, l'indice simple en base 100 de y_2 par rapport à y_1 est : $I = 100\,\frac{y_2}{y_1}$

Si I est l'indice de y_2 par rapport à y_1 alors $\frac{I}{100} = \frac{y_2}{y_1}$ **est le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2.**

Pour traduire des évolutions successives, on utilise souvent la notion d'indice : on choisit une **date de référence n , on détermine l'évolution par rapport à cette date de référence**. À cette valeur de référence, on affecte **l'indice 100**. Les autres indices sont calculés ainsi :

$$\textbf{Indice à la date k} = \frac{\textit{valeur à la date k}}{\textit{valeurs à la date de référence}} \times 100$$

Exercice :

Le tableau suivant donne, pour une entreprise, les chiffres d'affaires, en milliers d'euros, pour la période 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffres d'affaires en milliers d'euros	2500	2875	3125	3500	3875	4125

1. *On prend pour base 100 le chiffre d'affaires pour 2001. Calculer l'indice du chiffre d'affaires pour chacune des années de 2002 à 2006. Présenter des résultats sous forme d'un tableau.*
2. *a) Calculer, sous forme décimale, le taux d'évolution t_1 entre la valeur du chiffre d'affaires pour 2001 et la valeur du chiffre d'affaires pour 2002. Vérifier que t_1 est égal au taux d'évolution entre la valeur de l'indice pour 2001 et la valeur de l'indice pour 2002.*
   b) Calculer, sous forme décimale, arrondi à 10^{-4} , le taux d'évolution t_2 entre la valeur du chiffre d'affaires pour 2002 et la valeur du chiffre d'affaires pour 2003. Vérifier que t_2 est égale au taux d'évolution entre la valeur de l'indice pour 2002 et la valeur de l'indice pour 2003. Ce résultat sera généralisé.
3. *Utiliser le résultat énoncé à la fin de la question 2 pour calculer les taux d'évolution t_3 , t_4 , t_5 du chiffre d'affaires de 2003 à 2004, de 2004 à 2005, et de 2005 à 2006. Donné les résultats sous forme décimale arrondie à 10^{-4} , puis sous forme de pourcentage. Présenter ces taux d'évolution sous forme de tableaux en pourcentage.*